

# Basi Biortogonali di Ondine e Schema di Lifting in $L^2(\mathfrak{R})$

Giacomo Boracchi  
Prof Maura Salvatori

Anno Scolastico 2002-2003

# Indice

<b>1 Ondine</b>	<b>1</b>
1.1 Approssimazione e Ricostruzione . . . . .	1
1.2 Teoria in $L^2(\mathfrak{R})$ . . . . .	2
1.2.1 Impostazione generale . . . . .	2
1.2.2 La trasformata Finestra . . . . .	3
1.2.3 La trasformata Ondina . . . . .	5
1.2.4 Risoluzione delle ondine . . . . .	7
1.3 Teoria nel caso discreto . . . . .	9
1.3.1 Impostazione generale . . . . .	9
1.3.2 Frame di Ondine . . . . .	12
1.3.3 Frame di Trasformate Finestra . . . . .	14
1.4 Analisi Multirisoluzione ed Ondine . . . . .	15
1.5 Regolarità delle Ondine ed Ondine a Supporto Compatto . . . . .	25
1.6 Esempi di MRA e ondine . . . . .	28
<b>2 Cenni di Teoria dei Segnali</b>	<b>35</b>
2.1 Introduzione . . . . .	35
2.2 Sistemi . . . . .	36
2.3 Conversione Analogico-Digitale e Digitale-Analogico . . . . .	39
<b>3 Ricostruzione Perfetta</b>	<b>46</b>
3.1 Algoritmo di Ricostruzione Perfetta . . . . .	46
3.2 Ricostruzione perfetta con due coppie di filtri differenti . . . . .	54
3.3 Ondine Biortogonali . . . . .	61
3.4 Esempi . . . . .	65
<b>4 Lifting</b>	<b>67</b>
4.1 Approfondiamo il caso biortogonale . . . . .	67

4.2	Lo schema di Lifting . . . . .	71
4.3	Esempi ed Applicazioni . . . . .	77
4.4	La rappresentazione polifase . . . . .	86
4.5	Lo schema di Lifting in rappresentazione polifase . . . . .	92
4.6	Scomposizione in Lifting . . . . .	94
4.7	Osservazioni ed Esempi . . . . .	98
<b>A</b>	<b>Programmi</b>	<b>107</b>
A.1	La struttura del programma, Haar e D4 . . . . .	107
A.2	Lo schema di Lifting e Lifting Duale . . . . .	110
A.3	”Lifting Opzionale” . . . . .	112
<b>B</b>	<b>Grafici e considerazioni</b>	<b>114</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>

# Introduzione

La tesi tratta la teoria delle ondine in  $L^2(\mathfrak{R})$  con particolare riguardo alle sue connessioni ed applicazioni in teoria dei segnali. Dopo una parte introduttiva sulle ondine ortonormali e sui fondamenti della teoria dei segnali, si presentano le basi biortogonali di ondine e lo schema di Lifting, un procedimento che permette di descrivere qualsiasi base biortogonale di ondine a supporto compatto.

Il primo capitolo inizia proponendo due possibili risposte al problema della scomposizione e ricostruzione di una funzione: la trasformata finestra e la trasformata ondina. Dopo una breve trattazione delle trasformate integrali, lo studio si concentra sulle ondine discrete, ossia sulla ricerca di basi ortonormali di  $L^2(\mathfrak{R})$  ottenute traslando e dilatando un'opportuna funzione, detta funzione madre. Sono così introdotti i concetti fondamentali di analisi multirisoluzione (MRA), di funzione di scala, di filtro e di maschera del filtro.

Si enuncia il Teorema di Mallat (1989), che permette di ricavare la funzione madre di ondine a partire dal filtro passa basso associato alla funzione di scala ortonormale di una MRA. Si dedica particolare attenzione alle ondine a supporto compatto, alle condizioni che ne garantiscono l'esistenza a partire da filtri finiti (FIR), e alle proprietà che migliorano l'efficacia delle trasformazioni associate.

Negli esempi si costruiscono ondine a partire dalla MRA di Haar e di Shannon e si pongono i fondamenti della codifica in sottobande, mostrando l'impiego congiunto di ondina e funzione di scala. Sono inoltre presentate le ondine a supporto compatto, costruite da Daubechies (1988), definite e studiate a partire dai loro filtri passa basso. In particolare ci si sofferma sulle ondine di Daubechies a due momenti nulli, le ondine D4.

Nel secondo capitolo si introducono i concetti base della teoria dei segnali, sottolineandone le connessioni con la teoria delle ondine. Ad esempio, troncatura della banda del segnale corrisponde a proiettare su spazi della MRA di Shannon la funzione, una buona conversione analogico-digitale equivale ad approssimare una trasformata discreta in-

vertibile. Tutte le operazioni vengono eseguite grazie ai filtri associati alla MRA, che in teoria dei segnali sono particolari sistemi.

Si dimostra inoltre il Teorema del Campionamento di Shannon, che garantisce la possibilità di ricostruire una funzione analitica a partire da un sufficiente numero di campionamenti e se ne discute l'applicabilità affrontando così il problema dell'aliasing.

Il terzo capitolo presenta un significativo punto d'incontro tra le due teorie: l'algoritmo di ricostruzione perfetta di Mallat (1989) e, più in generale, la codifica in sottobande con filtri biortogonali. L'algoritmo di Mallat divide il segnale in due canali. Nel primo viene trasmessa un'approssimazione del segnale, ottenuta grazie alla funzione di scala, nel secondo vengono trasmessi i dettagli necessari per la sua ricostruzione, che si ottengono mediante le ondine. La dimostrazione che presentiamo, come l'applicazione dell'algoritmo, utilizza i filtri passa basso e passa alto di una MRA ortonormale. L'algoritmo, unito ad una fase di approssimazione dei coefficienti del dettaglio prodotti, realizza una codifica compressa che permette una buona ricostruzione del segnale. Si determinano inoltre le formule per la codifica in sottobande basata sul sistema di Haar e, con due programmi scritti in Maple, si paragona l'efficacia di questa con quella basata sulle ondine D4.

La ricerca di condizioni sotto le quali avviene ricostruzione perfetta, nel caso si utilizzino coppie differenti di filtri per la scomposizione e la ricostruzione, introduce le basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Seguendo l'impostazione di Cohen (1992), si definiscono le coppie di filtri biortogonali. Si indagano poi le condizioni sotto le quali, a partire da quattro filtri biortogonali, si possono definire due funzioni di scala  $(\phi, \tilde{\phi})$  e due funzioni ondina  $(\psi, \tilde{\psi})$ , in modo da costruire una coppia di basi biortogonali di ondine. Le basi biortogonali di ondine  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , possono essere viste come un'opportuna generalizzazione delle classiche ondine ortonormali, per le quali avviene

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}), \quad f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}.$$

Come si evince dalle formule, se si costruisce una MRA a partire da ciascuna funzione di scala, una verrà utilizzata per la scomposizione e una per la ricostruzione del segnale nella codifica in sottobande. Si descrivono quali differenti proprietà ricercare per entrambe le ondine e le relazioni di ortogonalità che sussistono fra le due MRA.

Il quarto capitolo è dedicato allo Schema di Lifting e ai cambiamenti che questo produce ad un sistema biortogonale. Inizialmente si dimostrano il Teorema di Chui e il Lemma di Herey-Vetterli, descrivendo così tutti e soli i sistemi biortogonali di filtri FIR. Il Teorema di Chui (1992) caratterizza tutti i possibili filtri  $(g, \tilde{g})$ , associati ad

una coppia di filtri duali  $(h, \tilde{h})$ , che rendono il sistema  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  biortogonale. Il Lemma di Herely-Vetterli (1992) dimostra che tutti e soli i filtri duali ad un fissato filtro  $h$  differiscono fra loro di un termine della forma  $e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)} s(2\omega)$ , dove  $s(\omega)$  è un qualunque polinomio trigonometrico. Da questi segue il risultato principale contenuto nell'articolo di Sweldens *The Lifting Scheme: a Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets* (Applied and Computational Harmonic Analysis 3, 1996), dove si introduce lo schema di Lifting. Il Lifting permette di ottenere, a partire da un sistema di filtri FIR biortogonali  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ , un altro sistema di filtri FIR  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  ancora biortogonale, che risulta legato al precedente mediante la scelta del polinomio trigonometrico  $s(\omega)$ . Questo polinomio può essere scelto in modo da aumentare il numero dei momenti nulli dell'ondina, ottenendo così un vantaggio computazionale nella codifica in sottobande.

Vengono quindi determinati appropriati polinomi per aumentare, con un passaggio di Lifting, il numero di momenti nulli dell'ondina di Haar e dell'ondina D4.

Alla luce dei risultati precedenti, si ricava lo schema di codifica in sottobande nel caso il sistema venga modificato da Lifting. Si ottiene così uno schema che coinvolge solo i filtri del sistema iniziale ed il polinomio di Lifting,  $s(\omega)$ .

Il Teorema di Fattorizzazione, presentato nell'articolo di Daubechies e Sweldens *Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps* (Journal of Fourier Analysis, 1998), permette di scomporre una qualsiasi base biortogonale di  $L^2(\mathfrak{R})$  a supporto compatto, in un numero finito di passaggi di Lifting e Lifting Duale, a partire dalla Lazy Wavelet. Il risultato viene dimostrato grazie all'algoritmo euclideo di fattorizzazione per polinomi di Laurent e alla rappresentazione polifase. A partire da questo risultato sono state dedotte alcune conseguenze nella codifica in sottobande. Si riporta inoltre la fattorizzazione in Lifting delle ondine D4.

Nell'ultima parte vengono presentati e commentati alcuni programmi, sviluppati con Maple 9, che realizzano la codifica in sottobande basata sul sistema di Haar, sulle ondine D4, e su basi biortogonali ottenute da questi mediante passaggi di Lifting e di Lifting Duale.

Viene inoltre sperimentata l'efficienza di una codifica non biortogonale, realizzata inserendo nello schema un sistema che esegue il passaggio di Lifting su ogni singolo coefficiente solo dopo averne valutato l'opportunità.

I programmi scritti, ad ogni iterazione della la fase di scomposizione, eseguono un troncamento sui coefficienti del dettaglio, presentando così l'efficacia del Lifting, grazie ad una valutazione della compressione prodotta.

# Capitolo 1

## Ondine

### 1.1 Approssimazione e Ricostruzione

All'inizio del diciannovesimo secolo, i primi risultati ottenuti da Fourier mostrarono come fosse possibile scrivere una funzione periodica e continua, come combinazione lineare di funzioni elementari più semplici: le funzioni seno e coseno. Tuttavia, con la serie di Fourier, non si riesce ad ottenere una buona approssimazione per le funzioni irregolari, il cosiddetto fenomeno di Gibbs si presenta nelle approssimazioni di funzione con discontinuità di salto.

Fourier stesso estese questi risultati alle funzioni non periodiche, introducendo la trasformata di una funzione. Purtroppo l'esatta ricostruzione avviene solo per alcune funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$ , sostanzialmente per quelle più regolari, ad esempio per le funzioni di Schwartz.

In sostanza Fourier aveva scomposto un sottospazio di  $L^2(\mathfrak{R})$ , rispetto ad una base: quella delle funzioni trigonometriche.

La questione va letta proprio in quest'ottica per capire i successivi sviluppi della teoria: siamo di fronte ad un problema di scomposizione di un elemento di uno spazio vettoriale rispetto ad una base scelta. Il risultato ideale sarebbe riuscire a scomporre tutto  $L^2(\mathfrak{R})$  rispetto ad una base, possibilmente ortonormale, di facile scrittura e che generi una quantità finita, o perlomeno numerabile, di coefficienti per ogni funzione. Quindi, per ottenere dei risultati migliori, bisogna cercare nuove basi rispetto alle quali scomporre tutto  $L^2(\mathfrak{R})$ .

I problemi nascono dal fatto che ci si trova a lavorare con spazi vettoriali, o meglio con spazi di Hilbert, che sono necessariamente infinito dimensionali (ad esempio  $L^2(\mathfrak{R})$ , o alcuni suoi sottospazi), e quindi, nonostante si possa cercare di scegliere una base estremamente comoda, ci si troverà nel caso più generale, ad avere a che fare con infiniti coefficienti. Questo è un problema per qualsiasi applicazione pratica, in quanto nei processi numerici si riesce a considerare solo una quantità finita di coefficienti, quindi occorre una stima dell'errore che si commette sostituendo alla funzione generica una opportuna combinazione lineare finita di elementi della base.

Vedremo nel seguito i principali risultati teorici che si sono ottenuti negli ultimi anni.

## 1.2 Teoria in $L^2(\mathfrak{R})$

### 1.2.1 Impostazione generale

Per associare ad una qualsiasi funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  un insieme di numeri reali (i suoi coefficienti) bisogna, prima di tutto, fissare una base, o perlomeno un sistema di generatori, di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Nel caso più generale si cercherà la famiglia di funzioni

$$\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \text{ tali che } \langle \phi_\gamma \rangle_{\gamma \in \Gamma} = L^2(\mathfrak{R}),$$

dove per  $\langle \phi_\gamma \rangle_{\gamma \in \Gamma}$  si intende l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti reali degli elementi  $\phi_\gamma$  al variare dell'indice  $\gamma$  in  $\Gamma$ .

Per cominciare si porranno condizioni poco restrittive sull'insieme degli indici  $\Gamma$ , supporremo che  $\Gamma$  sia isomorfo a  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ .

In questo modo potremo sempre associare ad una funzione  $f$  un insieme di coefficienti nel seguente modo

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f \longrightarrow \{ \langle f, \phi_\gamma \rangle \}_{\gamma \in \Gamma},$$

dove il simbolo  $\langle, \rangle$  indica il prodotto interno tra elementi di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Per determinare l'insieme di funzioni  $\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , si cercherà di generare ogni funzione  $\phi_\gamma$ , a partire da un'unica funzione madre, che chiameremo  $\Phi$ , agendo su essa con traslazioni, dilatazioni, contrazioni, cambiamenti di fase, e altre trasformazioni che alterino forma e posizionamento della  $\Phi$  originale. Ovviamente, per quanto si possa modificare  $\Phi$ , a partire da una funzione qualunque non si otterrà sempre un sistema di generatori di  $L^2(\mathfrak{R})$  o un insieme di vettori linearmente indipendente. Bisognerà quindi indagare

sotto quali condizioni si ottiene una base per  $L^2(\mathfrak{R})$ . Inoltre vorremmo un teorema che ci permetta la ricostruzione di una funzione  $f$  a partire dai suoi coefficienti.

Ora introdurremo i primi risultati della teoria seguendo quest'ottica.

## 1.2.2 La trasformata Finestra

Prima di iniziare è d'obbligo precisare che, dove non specificato, verranno prese in considerazione funzioni di variabile reale a valori complessi, e che quindi sarà possibile agire sulla parte immaginaria della funzione.

Nel 1946 Gabor introdusse per la prima volta l'idea della trasformata finestra scegliendo di costruire l'insieme  $\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  a partire da una funzione  $g \in L^2(\mathfrak{R})$  a supporto compatto. Inoltre Gabor scelse tale  $g$  tra le funzioni reali e pari. Definiamo quindi

**Definizione 1.2.1** (Funzione Madre per una Trasformata Finestra)

*Diciamo che una funzione  $g$  genera un sistema di trasformate finestra se soddisfa le tre richieste seguenti*

- i)  $g \in L^2(\mathfrak{R})$ ,
- ii)  $g$  ha supporto compatto,
- iii)  $g(t) = g(-t)$ .

Per ottenere un sistema di generatori per  $L^2(\mathfrak{R})$  si agisce su  $g$  con delle traslazioni e dei cambiamenti della fase complessa. Definiamo nel modo seguente l'elemento:

**Definizione 1.2.2** ( $(u, \xi)$ -simo elemento della Trasformata Finestra)

*Sia  $g$  una funzione che soddisfa le ipotesi della Definizione 1.2.1, allora  $\forall u, \xi \in \mathfrak{R}$ ,  $\xi > 0$ , definiamo  $(u, \xi)$ -simo elemento della Trasformata Finestra*

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}.$$

*La famiglia*

$$\{g_{u,\xi}(t)\}_{u,\xi}, \quad \text{con } (u, \xi) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$$

*viene detta Sistema di Trasformate Finestra.*

Ora ha senso associare ad ogni funzione  $f \in L^2(\mathfrak{R})$  un insieme di coefficienti indicato dalla coppia  $(u, \xi)$ , che chiameremo  $S_{u,\xi}(f)$ , definendoli nella maniera più naturale: il  $(u, \xi)$ -simo coefficiente, sarà il prodotto interno della  $f$  con il  $(u, \xi)$ -simo elemento del sistema,

**Definizione 1.2.3** ( $(u, \xi)$ -simo Coefficiente di Trasformata Finestra)

Sia  $f$  una funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ , chiamiamo  $(u, \xi)$ -simo coefficiente di trasformata finestra di  $f$

$$S_{u,\xi}(f) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt \quad \forall f \in L^2(\mathfrak{R})$$

Queste definizioni spiegano il termine trasformata finestra, infatti la generica funzione  $g_{u,\xi}$  ha supporto compatto e parte reale simmetrica rispetto all'asse  $t = u$ . Quando si procede al calcolo dei coefficienti, influisce solo la parte di  $f$  che interseca tale supporto.

Il seguente teorema afferma che, a partire da una funzione  $g$  che genera una trasformata finestra, l'insieme  $\{g_{u,\xi}\}_{u,\xi}$  è un sistema di generatori per  $L^2(\mathfrak{R})$ . In particolare offre una formula di ricostruzione per qualsiasi funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ ,

**Teorema 1.2.1** (Formula di Ricostruzione per la Trasformata Finestra)

Sia  $g$  una funzione che soddisfa le ipotesi della Definizione 1.2.1, allora si ha che  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R})$  vale

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi)g(t-u)e^{i\xi t} du d\xi$$

inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi$$

dove la prima uguaglianza è da intendersi come uguaglianza in norma  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Il secondo asserto del teorema ci assicura che ha senso definire un operatore continuo  $S$  che associa ad ogni funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  l'insieme dei coefficienti trasformata finestra. Definiamo quindi

**Definizione 1.2.4** (Operatore Trasformata Finestra)

Sia  $S$  l'operatore così definito

$$S : L^2(\mathfrak{R}) \longrightarrow {}^2(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})$$

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f \longrightarrow S(f) = \{S_{u,\xi}(f)\}_{u,\xi \in \mathfrak{R}}$$

dove  $S_{u,\xi}(f)$  è il coefficiente di trasformata finestra di indice  $(u, \xi)$ .

Nel prossimo paragrafo vedremo una più recente applicazione dello stesso modello che ha portato alla costruzione delle ondine.

### 1.2.3 La trasformata Ondina

Il difetto della trasformata finestra è che ogni funzione  $g_{u,\xi}$ , costruita a partire dalla una funzione madre  $g$ , preserva l'ampiezza del supporto della funzione generatrice. Questo non impedisce la ricostruzione della funzione, ma complica la situazione per funzioni che assumono valori molto differenti nell'ampiezza del supporto. L'effetto si evidenzia nei coefficienti che sono difficilmente gestibili nelle applicazioni pratiche.

Le ondine vogliono sopperire questa mancanza della trasformata finestra: utilizzando un sistema di ondine si perde la possibilità di interagire con la parte complessa, di modulare cioè la funzione, a vantaggio della possibilità di espandere e contrarre il supporto della funzione madre, in modo da generare un sistema che offra funzioni a supporti differenti.

Diamo così la seguente definizione,

**Definizione 1.2.5** (Funzione Madre per la Trasformata Ondina)

*Una funzione  $\Psi$  genera un sistema di trasformata ondina se soddisfa le condizioni seguenti*

- i)  $\Psi \in L^2(\mathfrak{R})$
- ii)  $\|\Psi\| = 1$
- iii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0$

Genereremo il nostro sistema traslando e contraendo  $\Psi$ ,

**Definizione 1.2.6** ( $(u, s)$ -simo elemento della Trasformata Ondina)

*Sia  $\Psi$  una funzione madre per le ondine, definiamo  $(u, s)$ -simo elemento della trasformata ondina la funzione*

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad \forall u, s \in \mathfrak{R}, s > 0.$$

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per la trasformata finestra possiamo definire il coefficiente ondina di indice  $(u, \xi)$  di una funzione come

**Definizione 1.2.7** ( $(u, s)$ -simo Coefficiente di Trasformata Ondina)

*Sia  $f$  una funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ , chiamiamo  $(u, \xi)$ -simo coefficiente di trasformata ondina di  $f$*

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \quad \forall u, s \in \mathfrak{R}, s > 0.$$

Se assumiamo inizialmente di lavorare con una funzione  $\Psi$  a valori reali, allora a meno di soddisfare un'ulteriore ipotesi, abbiamo un risultato analogo al Teorema di ricostruzione per la trasformata finestra. Questo risultato ci garantisce che le  $\{\psi_{u,s}\}_{u,s}$  generano tutto  $L^2(\mathfrak{R})$ .

**Teorema 1.2.2** (Formula di Ricostruzione per la Trasformata Ondina Reale)

*Sia  $\Psi$  una funzione che soddisfa le seguenti ipotesi*

- i)  $\Psi \in L^2(\mathfrak{R})$ ,
- ii)  $\Psi$  sia una funzione reale,
- iii)  $\Psi$  soddisfa la cosiddetta condizione d'ammissibilità

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (1.1)$$

Allora  $\forall f \in {}^2(\mathfrak{R})$  vale, almeno nel senso delle distribuzioni, ossia nel senso indicato da (1.3)

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du ds, \quad (1.2)$$

inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du ds.$$

Si osserva che la condizione di ammissibilità (1.1) implica la richiesta **iii)** della Definizione 1.2.5 che era stata introdotta all'inizio. Infatti da (1.1) segue,

$$\hat{\Psi}(\omega) = 0 \quad \text{ossia} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega = 0.$$

In realtà quest'ultima condizione è quasi sufficiente per le funzioni reali di  ${}^2(\mathfrak{R})$ , infatti basta scegliere una funzione  $\Psi$  regolare che decade all'infinito con una rapidità sufficiente, per ottenere una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema. È sufficiente prendere quindi:

$$\Psi \quad t.c \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|) \Psi(t) dt < +\infty.$$

Bisogna inoltre osservare che l'uguaglianza (1.2) è garantita nel senso delle distribuzioni, vale cioè

$$\forall g \in {}^2(\mathfrak{R})$$

$$\langle f, g \rangle = \langle C_{\Psi}^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du ds, g \rangle_{{}^2(\mathfrak{R})} . \quad (1.3)$$

Si può dimostrare che nel caso di ondine reali l'uguaglianza vale anche in norma  $L^2$ , cioè

$$\lim_{b, c \rightarrow +\infty; a \rightarrow 0^+} \left\| f - \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du ds \right\| = 0 .$$

Con questo teorema siamo in grado di ricostruire tutte le funzioni di  ${}^2(\mathfrak{R})$ , utilizzando una funzione ondina reale.

Le ondine complesse non verranno prese in considerazione in questo lavoro in quanto i risultati ottenuti con le ondine reali sono sufficienti per i nostri scopi e per la maggior parte delle applicazioni pratiche. Facciamo comunque presente che esiste una teoria che si sviluppa con risultati simili a quelli ottenuti per le ondine reali.

### 1.2.4 Risoluzione delle ondine

Vediamo ora più nel dettaglio che vantaggi comporta l'utilizzo di un sistema di ondine piuttosto che di trasformate finestra. Partiamo da una funzione ondina reale  $\Psi$ , per questa funzione vale

$$\|\Psi\|^2 = 1 ,$$

per questo possiamo intendere  $t \rightarrow |\Psi(t)|^2$ , come una densità di probabilità. Fatta questa precisazione possiamo modificare opportunamente la funzione affinché questa abbia primo momento nullo. Il che vuol dire richiedere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |\Psi(t)|^2 dt = 0 .$$

D'ora in poi diremo che una funzione è centrata in un punto  $t = \gamma$  se il suo primo momento vale  $\gamma$ .

Segue che la generica funzione  $\psi_{u,s}(t)$ , è una funzione centrata in  $u$ . Calcoliamo quindi una stima della dispersione della funzione attorno al suo centro, con il secondo momento della funzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |\psi_{u,s}(t)| dt = s^2 \sigma_t^2$$

dove

$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t)^2 |\Psi(t)| dt$ , rappresenta la dispersione attorno all'origine della funzione madre.

Valutiamo dov'è centrata  $\hat{\Psi}$  e chiamiamo tale punto  $\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \hat{\Psi}(\omega) d\omega$ . Segue, per la proprietà della trasformata di Fourier rispetto a traslazioni e dilatazioni, che  $\hat{\psi}_{u,s}(t)$  è centrata in  $\frac{\eta}{s}$ .

Un calcolo analogo della dispersione di  $\hat{\psi}_{u,s}(t)$  attorno a  $\frac{\eta}{s}$ , induce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \frac{\eta}{s})^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)| d\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2}$$

dove

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\Psi(\omega)| d\omega$$

rappresenta la dispersione attorno all'origine della trasformata della funzione madre.

Se ci poniamo nel piano  $(t, \sigma)$ , possiamo associare a  $s\sigma_t$  e  $\frac{\sigma_\omega}{s}$  la lunghezza dei lati di un rettangolo centrato in  $(u, \frac{\eta}{s})$ .

Tale rettangolo si chiama *Heisenberg Box* della funzione ed offre una stima della dispersione di  $\Psi_{u,s}$ . Le proporzioni tra i lati del rettangolo variano al variare di  $s$ , parametro che contrae la funzione ondina. Per valori di  $s < 1$ , la funzione  $\Psi$  viene contratta offrendo una migliore approssimazione per funzioni con brusche variazioni, ne segue che la dispersione nel tempo è ridotta rispetto al valore di riferimento  $\sigma$  e l'*Heisenberg Box* si restringe lungo l'asse del tempo.

L'area del rettangolo è però invariante al variare della coppia di parametri  $(u, s)$ , com'è facile notare. Quindi ad una migliore approssimazione nel tempo consegue un peggioramento nella parte della frequenza e un conseguente allungarsi del lato lungo l'asse delle frequenze.

Se si imposta la stessa costruzione per la trasformata finestra si ottiene un rettangolo con lati invarianti. Il che implica la stessa qualità di approssimazione per qualsiasi valore dei parametri.

Quindi per avere, sia nel caso della trasformata ondina che in quello della trasformata finestra, funzioni con dispersione minore, bisogna intervenire sulle funzioni madri per ridurre l'area del *Heisenberg Box*.

Tuttavia il seguente principio ci dice che è impossibile ridurre la suddetta area oltre  $\frac{1}{4}$  [cfr Mallat 4.1].

**Teorema 1.2.3** (Principio di Indeterminazione di Heisenberg)

Per qualsiasi funzione  $f \in L^2(\mathfrak{R})$  vale la stima

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}.$$

L'uguaglianza vale solo nel caso la funzione  $f$  sia una Gaussiana

Dal momento che, oltre un certo limite, la risoluzione dell'approssimazione non è migliorabile, le ondine si dimostrano vantaggiose se paragonate alla trasformata finestra. Se si utilizza un sistema di ondine, in presenza di brusche variazioni della funzione, acquistano automaticamente maggior peso i coefficienti corrispondenti a componenti del sistema con  $s$  minore. Viceversa, dove la funzione si mantiene pressoché costante, saranno le componenti con  $s$  maggiore a produrre i coefficienti più significativi. Lo stesso discorso può essere fatto per la trasformata della funzione.

## 1.3 Teoria nel caso discreto

### 1.3.1 Impostazione generale

I risultati del paragrafo precedente sono senza dubbio incoraggianti. I teoremi assicurano che è possibile scomporre e ricostruire una qualsiasi funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ , pur di disporre di una funzione madre che generi un sistema di ondine o di trasformate finestra.

Si nota però che la formula di ricostruzione è una trasformata integrale, questo rende impossibile un impiego diretto di questi risultati nella pratica. Bisognerebbe determinare una formula di ricostruzione che utilizzi una quantità discreta di coefficienti e che risulti più facilmente computabile.

Impostiamo la ricerca cercando di associare ad una funzione  $f$  di  $L^2(\mathfrak{R})$  una successione discreta di coefficienti. Quest'idea è motivata dalla prospettiva di escludere le code della successione dei coefficienti, in modo da ottenerne un insieme finito. Per fare questo abbiamo bisogno di un insieme di funzioni  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ , con  $J$ , l'insieme degli indici, numerabile. Quindi in analogia col caso continuo possiamo associare ad ogni funzione una successione di coefficienti nel seguente modo

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad \longrightarrow \quad \{ \langle f, \varphi_j \rangle_{L^2} \}_{j \in J}.$$

A partire da questi coefficienti non si avranno, a priori, risultati analoghi alla formula di ricostruzione per il caso continuo. Possiamo comunque avanzare delle richieste riguardo

le successioni dei coefficienti, richieste che necessariamente si tradurranno in condizioni da imporre sulle funzioni  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  scelte. Per far sì che questi coefficienti caratterizzino in qualche modo la funzione, imporrò le seguenti condizioni

i) Ogni successione dei coefficienti dovrà ricondurre ad una sola funzione, cioè dovrà valere

$$\text{se } \forall j \in J \text{ vale } \langle f, \varphi_j \rangle = \langle g, \varphi_j \rangle \text{ allora } f = g.$$

ii) A funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$ , dovranno corrispondere successioni di  $\ell^2(J)$

$$f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad \Rightarrow \quad \{\langle f, \varphi_j \rangle\}_{j \in J} \in \ell^2(J).$$

iii) Successioni vicine in norma  $\ell^2(J)$  devono corrispondere a funzioni vicine in norma  $L^2(\mathfrak{R})$ , questa richiesta può essere espressa nel modo seguente

$$\exists B \in \mathfrak{R}^+ \text{ t.c. } \forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad \|\{\langle f, \varphi_j \rangle\}_{j \in J}\| \leq B \|f\|$$

Queste tre richieste vengono soddisfatte dalla condizione che definisce i cosiddetti frame.

**Definizione 1.3.1** (Frame di  $L^2(\mathfrak{R})$ )

Una collezione di funzioni  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  di  $L^2(\mathfrak{R})$  è detta frame di  $L^2(\mathfrak{R})$  se esistono  $\exists A, B \in \mathfrak{R}^+$  t.c

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad A \|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|_{L^2}^2. \quad (1.4)$$

Se accade che  $A=B$  allora il frame si dice tight.

**Proposizione 1.3.1** (Formula di Ricostruzione per Tight Frame)

Sia  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  un tight frame, allora vale

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}), \quad f = A^{-1} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

e l'uguaglianza è valida almeno in senso delle distribuzioni.

Vale inoltre la seguente proposizione per un frame qualunque

**Proposizione 1.3.2**

Sia  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  un frame per  $L^2(\mathfrak{R})$ , allora

$$\langle \varphi_j \rangle_{j \in J} = L^2(\mathfrak{R}).$$

Cioè il frame è un sistema di generatori per  $L^2(\mathfrak{R})$ .

I frame, anche se tight, non sono in generale una base, nulla garantisce che le funzioni siano linearmente indipendenti. Di conseguenza, la scrittura di una funzione come combinazione lineare degli elementi di frame non è in generale unica. Resta il fatto che un frame è un sistema di generatori e quindi è legittimo cercare una formula di ricostruzione.

Per avere una formula di ricostruzione nel caso di un frame non tight bisogna ancora introdurre qualche nuovo elemento.

**Definizione 1.3.2** (Operatore Frame)

Dato  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  un frame chiamiamo operatore associato al frame l'operatore

$$F : L^2(\mathfrak{R}) \rightarrow \ell^2(J)$$

così definito

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad F : f \longrightarrow \{ \langle f, \varphi_j \rangle \}_{j \in J}.$$

Detto  $F^*$  l'operatore aggiunto di  $F$ , si osserva che l'operatore  $(F^*F)$  è definito in  $L^2(\mathfrak{R})$  a valori in  $L^2(\mathfrak{R})$ . Si dimostra inoltre che  $(F^*F)$  è anche invertibile.

**Definizione 1.3.3** (Frame Duale)

Dato  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  un frame chiamiamo  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$  frame duale

$$\text{se vale } \forall j \in J \quad \tilde{\varphi}_j = (F^*F)^{-1}(\varphi_j)$$

Si verifica che la famiglia  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ , risulta essere effettivamente un frame di costanti  $B^{-1}$  e  $A^{-1}$ .

**Proposizione 1.3.3** (Formula di Ricostruzione per i Frame)

Se definiamo operatore frame duale di  $F$  l'operatore  $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$ , allora vale

$$\tilde{F}^*F = Id = F^*\tilde{F}$$

ossia  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R})$

$$\sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j = f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j$$

dove l'uguaglianza vale nel senso delle distribuzioni.

Questa proposizione offre una formula di ricostruzione a partire dai coefficienti del frame, utilizzando però un secondo frame per la ricostruzione. Questo è sempre valido, anche nel caso di un frame tight, infatti come si osserva facilmente, il frame duale di un frame tight risulta essere lo stesso frame, contratto della costante di frame. Nel caso di  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  tight frame di costante  $A$  risulta quindi,

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{A} \varphi_j \quad \forall j \in J.$$

Dato un frame basta calcolarne il duale tramite l'operatore  $(F^*F)$ , per poter ricostruire una qualsiasi funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Vediamo un esempio banale di frame di  $\mathfrak{R}^2$ ,

### Esempio 1.3.1

Siano  $\underline{\phi}_0, \underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2$  tre vettori di  $\mathfrak{R}^2$  definiti in maniera seguente

$$\underline{\phi}_0 = [1, 0] \quad \underline{\phi}_1 = [-1/2, \sqrt{3}/2, ] \quad \underline{\phi}_2 = [-1/2, -\sqrt{3}/2]$$

allora questi tre vettori costituiscono un frame tight il cui frame duale è costruito nella maniera seguente

$$\tilde{\underline{\phi}}_i = 2/3 \underline{\phi}_i, \quad \text{per } i = 0, 1, 2.$$

L'introduzione del concetto di frame è finalizzato a rendere applicabili i risultati teorici riguardanti le ondine in  $L^2(\mathfrak{R})$ , per questo motivo è necessario analizzare la realizzabilità dei frame di ondine e dei loro duali.

## 1.3.2 Frame di Ondine

In questo paragrafo andremo ad indagare la realizzabilità di frame a partire da una funzione madre che genera ondine reali. Per rendere discreto un sistema di ondine  $\{\psi_{u,s}\}_{u,s}$  dove  $u$  varia in  $\mathfrak{R}$  e  $s$  in  $\mathfrak{R}^+$  si segue questo criterio.

### Definizione 1.3.4 (Frame di Ondine)

Sia  $\Psi$  una funzione madre per ondine, fissati  $a_0 > 1$  e  $b_0 \in \mathfrak{R}$  costruiamo una famiglia di funzioni nel seguente modo

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \quad \psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \Psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right).$$

Una condizione necessaria affinché la famiglia  $\{\psi_{m,n}\}_{m,n}$  generi un frame è che la funzione  $\Psi$  sia ammissibile. Le condizioni sufficienti perché una funzione ondina  $\Psi$

generi, grazie alla costruzione precedente, un frame di ondine, non sono restrittive ma molto tecniche [cfr Daubechies 3.3.1 e 3.3.2]. In sintesi, basta che la  $\Psi$  sia ammissibile e che decada abbastanza rapidamente, per avere un intero intervallo di valori  $a_0 > 1$  e  $b_0 \in \mathfrak{R}$  a partire dai quali la costruzione precedente genera un frame di ondine. Quindi un frame di ondine è facilmente costruibile e il calcolo dei coefficienti di una funzione è dato dal prodotto interno.

$$\langle f, \psi_{m,n} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{m,n}(t)} dt.$$

I problemi sorgono con la formula di ricostruzione. Come visto nel paragrafo precedente per la formula di ricostruzione bisogna utilizzare  $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ , il frame duale di  $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ . Il problema è che non si conoscono metodi esatti per il calcolo di tali frame duali a partire da un frame di ondine non tight.

Inoltre nulla assicura che a partire da  $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  frame di ondine, si ottenga un frame duale  $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  che sia anch'esso di ondine.

Questo avviene perché l'operatore di passaggio al duale non commuta con le traslazioni. Più precisamente, per ottenere un frame a partire dalla funzione  $\Psi$ , possiamo introdurre due operatori: quello di dilatazione  $D$ , iterato  $m$ -volte, e quello di traslazione  $T$ , iterato  $n$ -volte per ottenere la singola funzione  $\psi_{m,n}$ . Questi due operatori agiscono nel seguente modo,

$$(D^m f)(x) = a_o^{-m/2} f(a_o^{-m} x), \quad (T^n f)(x) = f(x - nb_o).$$

È immediato notare che l'operatore  $D$  commuta con  $(F^*F)$ , e quindi anche con  $(F^*F)^{-1}$ . Sfortunatamente non avviene lo stesso per l'operatore  $T$ , quindi per ottenere la funzione potrò procedere così

$$\tilde{\psi}_{m,n} = (F^*F)D^m T^n(\Psi) = D^m(F^*F)D^m T^n(\Psi)$$

operando cioè una dilatazione sulla funzione  $T^n(\Psi)$ . Si dovranno quindi calcolare tutte le  $n$  traslazioni della funzione  $\Psi$  per poi ottenere da queste il frame duale. Questo procedimento richiede, in generale, un singolo calcolo per ciascuna funzioni del frame duale. Conseguenza di questo fatto è che, in generale, il frame duale di un frame di ondine non risulta essere un frame di ondine.

Un altro modo di procedere è quello di cercare frame che siano *quasi tight*, frame per cui valga cioè  $\frac{B}{A} \approx 1$ . Per questi frame esiste una formula approssimata per il calcolo del duale, formula che richiede un numero ragionevole di iterazioni.

### 1.3.3 Frame di Trasformate Finestra

I risultati generali, quali la formula di ricostruzione, sono applicabili a qualsiasi tipo di frame, purché se ne conosca il duale. Il procedimento per costruire un frame di trasformate finestra é analogo a quello per costruire frame di ondine, con la differenza che si opera sulla funzione madre  $g$  mediante traslazioni e modulazioni di frequenza per ottenere il frame. Diamo la seguente definizione

**Definizione 1.3.5** (Frame di trasformate finestra)

*Sia  $g$  una funzione madre per la trasformata finestra tale che  $\|g\| = 1$ . Allora fissati opportunamente  $u_0$  e  $\xi_0 \in \mathfrak{R}$ , definiamo,*

$$\forall n, k \in Z \quad g_{n,k}(t) = g(t - nu_0)e^{ik\xi_0 t}.$$

*Chiamiamo  $\{g_{n,k}(t)\}$ , famiglia di trasformate finestra.*

Una condizione necessaria affinché a partire da  $g$  e dai parametri  $u_0$  e  $\xi_0$  si abbia effettivamente un frame è stata data da Daubechies.

**Teorema 1.3.1** (Condizione necessaria per i frame di trasformate finestra)

*Sia  $g$  una funzione madre per la trasformata finestra, supponiamo che la famiglia  $\{g_{n,k}(t)\}$ , costruita come nella Definizione 1.3.5 a partire dai valori  $(u_0, \xi_0)$  sia un frame. Allora vale*

$$\frac{2\pi}{u_0\xi_0} \geq 1.$$

*Inoltre le costanti di frame soddisfano la seguente relazione*

$$A \leq \frac{2\pi}{u_0\xi_0} \leq B.$$

Esistono anche delle condizioni sufficienti, trovate sempre da Daubechies, perchè la famiglia costruita come sopra costituisca un frame [cfr Daubechies 3.4.1 e 3.4.2]. Visto che sono anch'esse molto tecniche, e quasi sempre verificate da funzioni abbastanza regolari, diremo che le condizioni del teorema precedente sono quasi sufficienti. Se richiedessimo infatti una minima regolarità della funzione madre, otterremmo due intervalli di valori per  $u_0$  e  $\xi_0$  per cui la costruzione di sopra genera un frame di trasformate finestra. Prenderemo in esame solo alcune osservazioni circa la realizzabilità. A differenza dei frame di ondine, un frame di trasformate finestra possiede un operatore duale  $(F^*F)^{-1}$  che commuta sia con l'operatore di traslazione che con l'operatore di modulazione. Vale quindi la seguente proposizione,

**Proposizione 1.3.4** (Frame duale per la trasformata finestra)

Dato un frame di trasformate finestra  $\{g_{n,k}\}_{n,k}$ , gli elementi del frame duale  $\{\tilde{g}_{n,k}\}_{n,k}$  possono essere scritti nel modo seguente

$$\tilde{g}_{n,k} = \tilde{g}(t - nu_0)e^{ik\xi_0 t},$$

dove  $\tilde{g}$  rappresenta la finestra duale di  $g$ , cioè

$$\tilde{g} = (F^*F)^{-1}g.$$

Questo ci assicura che il frame duale di un frame di trasformate finestra è sempre un frame di trasformate finestra ed è quindi facilmente calcolabile.

Per approssimare una funzione con una trasformata finestra, i frame risultano uno strumento ideale, poiché è sempre possibile costruire un frame a partire da qualsiasi finestra e il calcolo del frame duale, necessario per la ricostruzione, non risulta essere problematico.

La stessa cosa non vale per le ondine, quindi le strade tra le due tecniche si dividono a questo punto. Seguendo un'altra strada si riesce ad ottenere una base ortonormale di  $L^2(\mathfrak{R})$  costituita da una infinità numerabile di ondine, ma è necessario partire da un altro punto: dall'analisi multirisoluzione.

## 1.4 Analisi Multirisoluzione ed Ondine

Si è visto nel paragrafo precedente che può essere conveniente scomporre una funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  rispetto ad un sistema generatore che non è una base, i frame. Introduciamo ora le *Basi di Riesz* che rappresentano una differente possibilità.

**Definizione 1.4.1** (Base di Riesz di uno spazio di Hilbert  $H$ )

La famiglia di funzioni  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  è detta *Base di Riesz* se valgono le seguenti proprietà

- i) la famiglia  $\{f_k\}_{k=1..{\infty}}$  è una base per  $H$ ,  $\forall g \in H$  esiste cioè una e una sola successione  $\{c_k\}_{k=1..{\infty}}$  di coefficienti t.c vale

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k,$$

ii) esistono due costanti  $A, B \in \mathfrak{R}^+$  tali  $\forall g$  della forma precedente si ha

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|g\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2,$$

dove i coefficienti  $c_k$  sono quelli del punto i)

Chiaramente ogni base ortonormale è anche base di Riesz con costanti  $A = B = 1$ . Possiamo vedere una base di Riesz come una base ortonormale *distorta* da un'operatore lineare continuo, invertibile con inverso continuo, grazie al quale viene mantenuta l'indipendenza lineare tra i vettori, ma si perde l'ortonormalità della base. Questo spiega perchè la ii) si sostituisce all'analogo del Teorema di Pitagora.

In particolare, siamo interessati alle basi di Riesz che sono della forma  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , dove  $\phi$  è una funzione opportunamente scelta. Questo tipo di basi di Riesz sono ortonormalizzabili, come ci garantisce la seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.1** (Ortonormalizzazione di una Base di Riesz)

Sia  $V$  un sottospazio chiuso di  $L^2(\mathfrak{R})$  ed esista  $g \in V$  tale che  $g(x - k)_{k \in \mathbb{Z}}$  è una base di Riesz di  $V$ . Si definisca  $\phi \in L^2$  mediante la formula

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{g}(\omega) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2}.$$

Allora  $\phi \in V$  e la famiglia  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  costituisce una base ortonormale di  $V$ . Inoltre  $\forall \phi'$  la successione  $\{\phi'(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , è una base ortonormale di  $V$  se e solo se  $\phi'(x) = \phi(x)\rho(x)$  dove  $\rho$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e modulo unitario.

Le basi di Riesz di questo tipo sono uno strumento ancora povero per esprimere tutto  $L^2(\mathfrak{R})$ , abbiamo bisogno di immergerle in un nuovo concetto, quello di Analisi Multirisoluzione.

**Definizione 1.4.2** (Analisi Multirisoluzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ )

Un'Analisi Multirisoluzione (MRA) di  $L^2(\mathfrak{R})$  è una successione  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  di sottospazi chiusi di  $L^2(\mathfrak{R})$  che è crescente, per cui vale cioè  $\forall j \quad V_j \subset V_{j+1}$ , avente le seguenti proprietà

i)

$$\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}, \quad \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \text{ denso in } L^2(\mathfrak{R}), \quad (1.5)$$

ii)  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R})$  e  $\forall j \in Z$  si ha

$$f(x) \in V_j \quad \text{se e solo se} \quad f(2x) \in V_{j+1} \quad (1.6)$$

iii) esiste una funzione  $g \in V_0$  tale che la successione  $\{g(x - k)\}_{k \in Z}$  sia una base di Riesz per lo spazio  $V_0$ . Tale funzione  $g$  è chiamata *funzione di scala della MRA*.

Osserviamo che grazie alla proprietà ii) la funzione di scala offre non solo un'espressione della base di  $V_0$ , ma anche quella di un qualsiasi spazio  $V_j$  della MRA. Varrà infatti che la successione

$$\{g(2^j x - k)\}_{k \in Z}$$

è una base di Riesz per  $V_j$ . Possiamo quindi considerare gli spazi  $V_j$  come una versione in scala dello spazio  $V_0$ , al crescere di  $j$  si avrà una risoluzione più accurata, al decrescere di  $j$  una risoluzione peggiore. Questo vale indipendentemente dalla funzione di scala scelta per la MRA, poiché è diretta conseguenza dell'inscatolamento degli spazi  $V_j$ .

Per il resto del paragrafo ci occuperemo di basi ortonormali al posto delle basi di Riesz, poiché grazie al Teorema di ortonormalizzazione, è sempre possibile ottenerne una a partire da una base di Riesz. Nel caso si faccia riferimento a una base ortonormale indicheremo con  $\phi$  tale base.

Prima di procedere bisogna fare presente che l'ortonormalizzazione stravolge la particolare natura di una base di Riesz, ad esempio l'insieme costituito da una spline polinomiale e dalle sue traslate intere è una base di Riesz ma non una base ortonormale per lo spazio  $V_0$  che generano. Nel caso si ortonormalizzasse questa base con il procedimento indicato nella proposizione (1.4.1), si otterrebbe una base che non è più composta da spline polinomiali. Quindi, se non altro per vantaggi computazionali, può essere preferibile mantenere una base che non sia ortonormale, ma che sia facilmente implementabile.

Ora che si intuisce la centralità della funzione di scala  $\phi$  nella MRA, vorremmo trovare delle condizioni per le quali una successione di spazi  $\{V_j\}_{j \in Z}$  costruita a partire dalla funzione di scala costituisca una MRA. O meglio, data  $\phi \in L^2(\mathfrak{R})$  definiamo

$$V_0 = \overline{\prec \phi(x - n) \succ_{n \in Z}} \quad (1.7)$$

$$V_j = \overline{\prec \phi(2^j x - n) \succ_{n \in Z}} \quad (1.8)$$

Abbiamo la certezza che, con questa definizione si otterrà una successione crescente di spazi, ma non possiamo ancora dire se sia o meno una MRA. Infatti non è detto che la collezione  $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sia una Base di Riesz per lo spazio  $V_0$ , e non un semplice sistema di generatori. E lo stesso vale per gli altri spazi generati come in (1.8). Vogliamo allora porre delle condizioni aggiuntive sulla funzione  $\phi$  affinché con tale procedimento si generi una base ortonormale del rispettivo spazio. Diamo allora le seguenti definizioni

**Definizione 1.4.3** (Funzione di Scala)

Sia  $g \in L^2(\mathbb{R})$  e gli spazi  $V_j$  definiti come sopra per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ , diciamo che  $g$  è una funzione di scala se  $\{g(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una Base di Riesz per  $V_0$  e se la famiglia di spazi  $V_j$  generati al variare di  $j \in \mathbb{Z}$  è una MRA.

**Definizione 1.4.4** (Funzione di Scala Ortonormale)

Sia  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , diciamo che è una funzione di scala ortonormale se la famiglia  $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di  $V_0$ .

Il seguente teorema ci offre una condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia di scala ortonormale.[cfr Daubechies]

**Teorema 1.4.1** (Caratterizzazione delle funzioni di scala ortonormali)

Una funzione  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  è di scala ortonormale se e solo se valgono

$$\text{i) } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi],$$

$$\text{ii) } \lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\phi}(2^{-j}\omega)| = 1,$$

iii) esiste  $\hat{h} \in L^2(T)$ , tale che

$$\hat{\phi}(2\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega) \tag{1.9}$$

dove per  $L^2(T)$  si intende lo spazio delle funzioni di periodo  $2\pi$  con norma  $L^2$  finita. La condizione (1.9) è la cosiddetta condizione di raffinabilità, espressa in termini di trasformata, ed è quella che garantisce il particolare inscatolamento degli spazi della MRA.

Alla luce di questi risultati il vero punto di partenza per una MRA diventa la funzione di scala, e non la successione di spazi, poiché quest'ultima è ottenibile sempre a

partire da una funzione appropriata.

Strettamente collegato alla funzione di scala esiste un secondo elemento, il *filtro associato ad una MRA*.

Poiché vale la proprietà dell'inscatolamento tra gli spazi di una MRA sarà possibile scrivere una base di  $V_{j-1}$  in funzione della base di  $V_j$ , e questo per ogni  $j$ . Quindi, poiché le funzioni  $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sono una base ortonormale di  $V_0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right), \phi(x-n) \right\rangle \phi(x-n), \quad (1.10)$$

poiché la funzione  $\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1}$ .

Diamo la seguente definizione.

**Definizione 1.4.5** (Filtro associato ad una MRA)

Si dice *filtro associato ad una MRA* la successione

$$\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{dove} \quad h_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right), \phi(x-n) \right\rangle, \quad (1.11)$$

Osserviamo che  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è la successione dei coefficienti nella serie (1.10). Se associamo a questa successione una serie di Fourier agli stessi coefficienti otteniamo uno strumento molto utile in teoria delle ondine.

**Definizione 1.4.6** (Maschera del Filtro  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ )

Sia  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  il filtro associato alla MRA, definiamo *maschera di tale filtro* la funzione

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n e^{-in\omega}. \quad (1.12)$$

Tale funzione  $\hat{h}$  sarà quindi  $2\pi$ -periodica. Osserviamo che la maschera del filtro  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , coincide con la trasformata di Fourier discreta di tale successione.

Dopo aver dato questa definizione possiamo riscrivere la (1.10) che diventa

$$\hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega), \quad (1.13)$$

ossia

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sqrt{2}\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)}. \quad (1.14)$$

Osserviamo che la (1.14) ci offre una formula molto semplice per il calcolo della maschera del filtro a partire dalla funzione di scala  $\phi$ .

Proviamo ora a definire una sorta di formula inversa, costruiamo cioè la funzione di scala e quindi la MRA, a partire dal filtro  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Così facendo si dimostra che una MRA è univocamente determinata dal suo filtro.

Poichè  $V_{p+1} \subset V_p$ , impostiamo una relazione analoga a (1.10) scrivendo  $\phi_{p+1}$  come combinazione lineare delle funzioni  $\phi_{p,k}$ , base di  $V_p$ . Passiamo l'espressione in termini di trasformata e otteniamo una relazione analoga a (1.13),

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \hat{\phi}(2^{p+1}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(2^p\omega) \hat{\phi}(2^p\omega).$$

Osserviamo che se iteriamo questa sostituzione in (1.13), possiamo esprimere  $\phi \in V_0$  a partire da  $V_P, P < 0$ , ottenendo

$$\forall P < 0 \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=P}^{-1} \left( \frac{\hat{h}(2^p\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(2^P\omega). \quad (1.15)$$

Ora, dato che la funzione  $\hat{\phi}(\omega)$  è continua per  $\omega = 0$ , facendo tendere  $P \rightarrow -\infty$  nella (1.15) si ottiene

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=-\infty}^{-1} \left( \frac{\hat{h}(2^p\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(0). \quad (1.16)$$

Da (1.16) si intuisce che la funzione di scala può essere definita a partire dal filtro della MRA. Il seguente teorema, dovuto a Mallat e a Meyer presenta le condizioni necessarie e sufficienti affinché questo si possa fare.

**Teorema 1.4.2** (Mallat, Meyer)

Sia  $\phi \in L^2(\mathfrak{R})$  una funzione di scala ortonormale. Sia  $\hat{h}$  la maschera del filtro  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $h_n = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{x}{2}), \phi(x-n) \rangle$ , allora vale

$$\forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (1.17)$$

e anche

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2}. \quad (1.18)$$

Viceversa, presa  $\hat{h}(\omega)$  una funzione  $2\pi$ -periodica e derivabile con continuità in un intorno dell'origine, che soddisfa la (1.17) e la (1.18) e se vale inoltre

$$\inf_{\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\hat{h}(\omega)| > 0, \quad (1.19)$$

allora

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=-\infty}^{-1} \left( \frac{\hat{h}(2^p\omega)}{\sqrt{2}} \right) \quad (1.20)$$

è la trasformata di Fourier di una funzione di scala  $\phi \in L^2(\mathfrak{R})$ .

Questo teorema garantisce la convergenza del prodotto infinito nella formula (1.20), che segue dalle ipotesi aggiuntive sul filtro  $\hat{h}(\omega)$ . Il fatto che tale espressione sia a tutti gli effetti una funzione è di basilare importanza ed è una questione che ricorrerà molto spesso nel seguito. Osserviamo in fine che la formula (1.20), coincide con la (1.16), nel caso di funzioni di scala ortonormale, infatti si avrebbe  $\hat{\phi}(0) = 1$ , per il punto ii) del Teorema di Caratterizzazione 1.4.1.

La condizione (1.17), merita un'osservazione a parte. Molte volte questa viene rimpiazzata da

$$\forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (1.21)$$

questo poiché il filtro  $h$  viene normalizzato diversamente, cioè in modo da avere  $\|h\|^2 = 1/\sqrt{2}$ . In tal caso anche la (1.18) cambia di conseguenza e diventa  $\hat{h}(0) = 1$ . Nei prossimi capitoli ci si riferirà molto spesso alla condizione (1.21).

**Definizione 1.4.7** (Filtro Specchio)

*Diciamo che la successione  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  definita come in (1.11) è un filtro specchio se la sua maschera soddisfa l'ipotesi (1.17).*

Diamo anche la seguente definizione che tornerà utile nei capitoli successivi,

**Definizione 1.4.8** (Filtro Passa Basso)

*Diciamo che una successione  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è un filtro passa basso se sua la maschera, data dalla Definizione 1.4.6, soddisfa le seguenti ipotesi*

$$\begin{aligned} & \cdot \forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 1, \\ & \cdot \hat{h}(0) = 1. \end{aligned}$$

Notiamo che ogni funzione di scala possiede un filtro specchio ad essa collegato, definito come in (1.11) e che il calcolo di quest'ultimo non presenta alcuna difficoltà, anche grazie alla formula (1.14).

L'importanza di questo legame, unita alle formule del Teorema di Mallat e al Teorema di caratterizzazione, verrà accentuata quando si aggiungerà a questo il fatto che da un MRA o, analogamente, da un filtro specchio associato ad una funzione di scala, è sempre possibile costruire una base ortonormale di ondine di  $L^2(\mathfrak{R})$ , vediamo come.

Dato che i sottospazi  $V_j$  sono chiusi, possiamo introdurre una successione  $\{P_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  di operatori, dove  $P_j$  rappresenta l'operatore di proiezione da  $L^2(\mathfrak{R})$  sul rispettivo sottospazio  $V_j$ . Il primo risultato importante che si ottiene con l'introduzione della MRA sta nel fatto che la successione  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  descriva tutto  $L^2(\mathfrak{R})$ . Vale infatti il seguente

**Teorema 1.4.3**

Sia  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  una MRA e sia  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ . Allora

$$\|f - P_j f\|_{L^2} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

La MRA ci offre quindi una buona approssimazione per ogni funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$ , vorremmo però che questa approssimazione avvenisse tramite una base di ondine, possibilmente ortonormale. Vediamo ora un modo per ottenere una base ortonormale di ondine a partire da una MRA.

**Definizione 1.4.9**

$\forall j$  denotiamo con  $W_j$  il complemento ortogonale di  $V_j$  in  $V_{j+1}$  e con  $D_j$  la proiezione ortogonale su  $W_j$ .

A questo punto, consegue che

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

e che

$$\forall i, j \quad i \neq j \quad W_j \perp W_i.$$

Inoltre, dalla proprietà dell'inscatolamento si avrà che  $W_j \subset V_{j+1}$  e quindi

$$\forall J > j \quad V_J = V_j \bigoplus_{i=j+1}^J W_i,$$

questo implica che

$$L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (1.22)$$

Abbiamo così una scomposizione di  $L^2(\mathfrak{R})$  in sottospazi ortogonali.

Supponiamo ora di esprimere ogni spazio  $W_j$  in funzione di un'appropriata base ortonormale, che chiameremo  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , seguirà che

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (1.23)$$

dove il termine  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$  compensa i dettagli che sono visibili nello spazio  $V_{j+1}$  ma non nello spazio  $V_j$ .

Inoltre, grazie all'ortogonalità fra gli spazi  $W_j$ , abbiamo che l'intera collezione  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  costituisce una base ortonormale per  $L^2(\mathfrak{R})$  e quindi vale

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.24)$$

Questa affermazione deve però essere ancora giustificata, in quanto abbiamo supposto l'esistenza di una base ortonormale per ogni spazio  $W_j$ . Il seguente teorema mostra la costruzione di una base di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ . La dimostrazione segue l'impostazione accennata sopra, si cerca cioè un'ondina  $\psi$  tale che  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sia una base ortonormale di  $W_j$ ; da questo seguirà che la collezione  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  costituisce una base per  $L^2(\mathfrak{R})$ . In particolare risulterà indispensabile l'ipotesi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi],$$

che si verifica nel caso  $\Phi$  sia una funzione di scala ortonormale.

A partire da qualunque MRA sarà possibile costruire una base ortonormale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ , pur di ortonormalizzare la funzione di scala. Tale operazione, come abbiamo già detto, non è sempre indolore e può modificare notevolmente la natura della base. Dal punto di vista dei filtri, non basterà quindi disporre di un filtro specchio, bisognerà che questo filtro produca, con la formula (1.14), una funzione di scala ortonormale, o equivalentemente che soddisfi le ipotesi del Teorema di Mallat e Meyer 1.4.2.

Enunciamo così il seguente teorema dovuto sempre a Mallat e a Meyer. [cfr Mallat thm 7.3]

**Teorema 1.4.4** (Ondine Associate ad un MRA)

Sia  $\Phi$  una funzione di scala ortonormale e sia  $\hat{h}$  la maschera del rispettivo filtro specchio. Chiamiamo  $\Psi$  la funzione la cui trasformata di Fourier vale

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (1.25)$$

dove abbiamo posto

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}. \quad (1.26)$$

Chiamiamo allora

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), \quad (1.27)$$

tale collezione  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di ondine di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Oppure, sfruttando il filtro  $\{h_n\}_n$  e la funzione di scala  $\phi$ , si scrive

$$\Psi(t) = \sum_n \sqrt{2} (-1)^{1-n} \overline{h_{-n+1}} \Phi(2t - n). \quad (1.28)$$

Questo teorema fornisce un modo per costruire una base di ondine ortonormali di  $L^2(\mathfrak{R})$  a partire da una MRA, o meglio, a partire da una funzione di scala ortonormale o da un filtro specchio che proviene da una MRA con funzione di scala ortonormale. Inoltre la relazione (1.24) è una formula di ricostruzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  che necessita solamente delle funzioni  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , a differenza di quanto avveniva per i frame di ondine. È bene sottolineare ancora la centralità che le maschere dei filtri e quindi i filtri, hanno in questo enunciato ed in tutta la teoria delle ondine. Per calcolare agevolmente la base di ondine è spesso necessario passare in termini di trasformata e sfruttare  $\hat{g}$ , una seconda funzione che considereremo una maschera di filtro, in quanto strettamente legata ad  $\hat{h}$ .

Visto il ruolo fondamentale che giocano queste due funzioni sono state date loro la seguenti definizioni.

**Definizione 1.4.10** (Filtro Passa Alto)

Chiameremo *filtro passa alto*, il filtro che ha maschera  $\hat{g}(\omega)$ , costruita nel modo seguente

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}, \quad (1.29)$$

dove  $h$  è un filtro passa basso.

A tale maschera è associata la successione di coefficienti così definita,

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad g_n = (-1)^{(1-n)} \overline{h_{1-n}}. \quad (1.30)$$

Ora abbiamo a disposizione un forte strumento per la costruzione di basi ortonormali di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ . Facciamo ancora una volta presente che si ricava una base ortonormale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$  soltanto nel caso si disponga di una funzione di scala ortonormale o di un filtro specchio che è riconducibile ad funzione di scala ortonormale. Infatti se così non fosse, a partire da un filtro qualunque non si riuscirebbe a costruire una funzione di scala ortonormale, in particolare verrebbe meno la proprietà **i)** del Teorema 1.4.1, che gioca un ruolo importante nella dimostrazione dell'esistenza di una base ortonormale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Senza queste ipotesi aggiuntive si riesce a garantire, per filtri di lunghezza finita, che l'insieme  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  costituisce un frame di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ , come vedremo in seguito.

La stragrande maggioranza delle ondine ortonormali è costruita seguendo questa impostazione e quindi basandosi su una MRA. Esistono tuttavia di basi ortonormali di ondine alle quali non è possibile associare alcuna MRA. Si veda ad esempio [Daubechies pg ][Mallat pg 241]

## 1.5 Regolarità delle Ondine ed Ondine a Supporto Compatto

Incominceremo questo paragrafo da una valutazione di quelle che possono essere delle buone proprietà per la funzione ondina, come ad esempio l'annullarsi dei momenti o la dimensione del supporto nel caso di ondine a supporto compatto.

Introduciamo la seguente definizione,

### Definizione 1.5.1

Diciamo che una funzione  $\Psi$  ha  $p$ -momenti nulli se avviene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \Psi(t) dt = 0 \quad \text{per } 0 \leq k < p.$$

Osserviamo che l'annullarsi dei momenti è anche un indice della rapidità con cui la funzione tende a zero quando  $t$  tende all'infinito. Avere più momenti nulli è quindi auspicabile per una funzione ondina a supporto non limitato, in modo da poterne trascurare in fase di approssimazione, i valori oltre una certa soglia.

Facciamo presente che questa definizione è valida anche per ondine a supporto compatto, infatti chiedere che l'integrale della definizione sia zero vuol dire che la funzione presenta una sorta di simmetria.

La seguente proposizione ci offre uno strumento per determinare i momenti nulli di una funzione ondina.

### Proposizione 1.5.1 (Momenti Nulli)

Sia  $\Psi$  una funzione ondina che genera una base ortonormale di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Se  $\hat{\Psi}(\omega)$  è  $p$  volte derivabile con derivata continua per  $\omega = 0$ , allora sono equivalenti

- i)  $L$ 'ondina  $\Psi$  ha  $p$  momenti nulli;
- ii)  $\hat{\Psi}(0) = D^i \hat{\Psi}(0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p - 1$  .;
- iii)  $\hat{h}(\pi) = D^i \hat{h}(\pi) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p - 1$  ;

Osserviamo che in virtù della (1.29) la **III**) è equivalente a chiedere  $\hat{g}(0) = D^i \hat{g}(0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p - 1$ .

Una proprietà auspicabile per le ondine a supporto compatto è quella di avere un supporto di dimensioni contenute.

Infatti in presenza di una funzione  $f$  con una discontinuità in  $x_0$  i coefficienti  $\langle \psi_{j,k}, f \rangle$  possono crescere notevolmente qualora  $x_0 \in \text{supp}(\psi_{j,k})$ .

Quindi, supponendo che la funzione  $\Psi$  abbia supporto di ampiezza  $K$ , per ogni scala fissata  $j$  ci sarebbero  $K$  coefficienti che risentirebbero della discontinuità di  $f$ .

È quindi vantaggioso lavorare con ondine a supporto compatto e con un supporto a dimensioni ridotte.

**Proposizione 1.5.2** (Supporto Compatto)

La funzione di scala  $\Phi$  ha supporto compatto se e solo se  $h_n$  possiede un numero finito di termini non nulli. In tal caso vale che se

$$\text{supp}(\Phi) = [N_1, N_2] \quad \text{allora} \quad \text{supp}(\Psi) = \left[ \frac{N_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - N_1 + 1}{2} \right].$$

Un altro criterio per valutare la funzione ondina è la sua regolarità. Se possediamo una base di ondine regolare, in presenza di errori di misurazione dei coefficienti, questo errore verrà amplificato in maniera regolare, senza stravolgere la funzione ricostruita. Nel caso di funzioni irregolari invece un errore nei coefficienti potrebbe avere molto più peso.

Per poter concludere qualcosa riguardo alla regolarità della funzione ondina generata da un filtro finito bisogna enunciare la seguente proposizione dovuta a *Tchamitchian*[Mallat pg 224].

**Proposizione 1.5.3** (Tchamitchian)

Sia  $\hat{h}(\omega)$  il filtro specchio associato ad una MRA che soddisfa le ipotesi della Proposizione 1.5.1 e sia quindi  $\omega = \pi$  una radice di molteplicità  $p$ . Posto

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^p \hat{l}(\omega),$$

detto  $B = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{l}(\omega)|$ , allora  $\Phi$  e  $\Psi$ , la funzione di scala e l'ondina costruita a partire da dal filtro  $h_n$  sono uniformemente Lipschitziane di ordine  $\alpha$  per ogni  $\alpha$  t.c

$$\alpha < \alpha_0 = p - \log_2 B - 1$$

In particolare possiamo concludere che nel caso si avesse  $B < 2^{p-1}$  allora  $\alpha_0 > 0$  e la proposizione ci garantisce la continuità delle funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$ , se invece si avesse  $B < 2^{p-1-m}$ , con  $m$  intero, avremmo che le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  sono  $m$  volte differenziabili. Purtroppo la molteplicità di  $\omega = \pi$  come radice di  $\hat{h}$ , non basta a garantire una maggior regolarità, infatti è necessario che al crescere di  $p$ , la costante  $B$  rimanga contenuta.

Solamente in tal caso  $\Phi$  e  $\Psi$ , oltre ad avere più momenti nulli, risulterebbero più regolari. Questa proposizione comunque giustifica la ricerca di filtri che portano ad ondine con il maggior numero di momenti nulli.

Prima di presentare il Teorema di Daubechies sulle ondine a supporto compatto, occorre fare qualche precisazione sui filtri passa basso.

Se  $\Phi$  è una funzione di scala a supporto compatto, il filtro passa basso  $h$  ad essa associata ha un numero finito di coefficienti non nulli per la Proposizione 1.5.2. Osserviamo che per la Definizione 1.4.6, la maschera  $\hat{h}$  associata a tale filtro risulta essere un polinomio trigonometrico.

Non è immediato dimostrare il viceversa. Se si dispone un filtro passa basso  $h$  che ha per maschera un polinomio trigonometrico  $\hat{h}$ , e  $\hat{h}$  soddisfa le condizioni della Definizione 1.4.8, non è detto che il prodotto infinito di formula (1.20), converga.

Il seguente teorema risolve questo problema [cfr Soardi pg 56].

**Teorema 1.5.1** (Funzione di Scala Associata a Filtri Finiti)

Sia  $\hat{h}$  una funzione di classe  $C^1$ ,  $2\pi$ -periodica che verifica le ipotesi della Definizione 1.4.8. Allora il prodotto  $\prod_{p=-\infty}^{-1} (\frac{\hat{h}(2^p\omega)}{\sqrt{2}})$  converge uniformemente su tutti i compatti alla funzione  $\phi(\omega)$  definita come in (1.20).

Vale inoltre

- .  $\phi \in L^2(T)$ ,
- .  $\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\phi}(2^{-j}\omega)| = 1$ ,
- .  $\hat{\phi}(2\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ .

Osserviamo che le conclusioni del Teorema non permettono di dedurre che  $\phi$  è una funzione di scala ortonormale.

Il risultato seguente, dovuto a Daubechies, è l'analogo del Teorema 1.4.2 per le ondine a supporto compatto, nel caso non si disponga di una funzione di scala ortonormale. Queste ipotesi meno restrittive non permettono di dedurre l'esistenza di una base ortonormale ma solamente di un tight frame di costante 1.

**Teorema 1.5.2** (Ondine a supporto compatto)

Sia  $\hat{h}$  un polinomio trigonometrico che soddisfa l'ipotesi (1.17) e (1.18)

$$\forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad \hat{h}(0) = \sqrt{2}.$$

Definiamo  $\Phi$  come in (1.20),

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=-\infty}^{-1} \left( \frac{\hat{h}(2^p\omega)}{\sqrt{2}} \right),$$

e chiamiamo  $\Psi$

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

con  $g$  che corrisponde all'espressione (1.26).

Allora  $\Phi$  e  $\Psi$  sono funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$  e soddisfano le seguenti

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \Phi(2x - n),$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n \overline{h_{-n+1}} \Phi(2x - n),$$

dove  $\{h_n\}$  è la successione dei coefficienti del polinomio trigonometrico  $\hat{h}$ .

Le funzioni  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}x - k)$  al variare di  $j, k$  in  $Z$  costituiscono un frame tight di  $L^2(\mathfrak{R})$  di costante 1.

Questo frame è una base ortonormale se e solo se  $\hat{h}$  soddisfa la cosiddetta condizione di Cohen [cfr Daubechies 6.3].

## 1.6 Esempi di MRA e ondine

Il sistema di Haar è l'esempio più semplice di MRA costruita a partire da una funzione spline polinomiale come funzione di scala ed è stata anche la prima MRA costruita.

**Definizione 1.6.1** (Spline polinomiali di ordine  $n$ )

Una funzione  $f$  è detta spline di ordine  $n$ , se fissati  $(n+1)$  punti nel piano  $(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$  detti nodi della spline vale

- i)  $f(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n,$
- ii)  $f$  è un polinomio di grado  $n$  in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}] \quad \forall i = 0, \dots, n-1$ , di classe  $C^{n-1}$  nei nodi,
- iii)  $\text{supp}(f) \subseteq [x_0, x_n].$

La funzione di scala  $\phi$  associata alla base di Haar è una spline polinomiale di ordine 0, con

$$\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x).$$

Segue che

- i)  $V_0 = \{\text{funzioni } f \text{ costanti su tutti gli intervalli } [k, k+1] \forall k \in Z\}$ ,  
 ii)  $V_n = \{\text{funzioni } f \text{ costanti su tutti gli intervalli } [2^n k, 2^n(k+1)] \forall k \in Z\}$ .

Sfruttando la formula (1.11) determiniamo il filtro associato alla funzione di scala,  $\{h_n\}_n$  nella maniera seguente

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_i = 0 \quad \forall i \neq 0, 1.$$

Vediamo ora che effettivamente  $\{h_n\}_n$  è un filtro specchio, poiché la maschera  $\hat{h}(\omega)$  è:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}}$$

e quindi le ipotesi (1.17), (1.18), (1.19) del Teorema di Mallat sono banalmente verificate.

Quindi questa funzione di scala genera una MRA, calcoliamo la base di ondine associata, potremmo sfruttare le formula in termini di trasformata utilizzando la maschera del filtro, ci risulta più semplice la formulazione della formula (1.28) otteniamo

$$\Psi(x) = \chi_{[0,1]}(2x) - \chi_{[0,1]}(2x-1).$$

Questa formula equivale banalmente a

$$\Psi(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[1/2,1]}(x).$$

La base ortonormale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ , sarà  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$ , dove

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j x - k)$$

e quindi

$$\forall j, k \in Z \quad \psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & x \in [k2^{-j}, k2^{-j} + 2^{-j-1}] \\ -2^{\frac{j}{2}}, & x \in [k2^{-j} + 2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}. \quad (1.31)$$

Questa è la base di ondine associata alla MRA di Haar, la maschera del filtro associata non è vantaggiosa quanto la funzione di scala, infatti

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} e^{-\frac{i\omega}{2}} \left( \frac{e^{\frac{i\omega}{2}} + e^{-\frac{i\omega}{2}}}{2} \right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-\frac{i\omega}{2}}.$$

e quindi,

$$\operatorname{Re}(\hat{h}(\omega)) = \sqrt{2} \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

La parte reale della maschera è definita su tutto  $\mathfrak{R}$ , il che vuol dire che questo non è un buon filtro passa basso, come si vedrà meglio nel capitolo dedicato alla teoria dei segnali.

Facciamo ora una considerazione che parte da un esempio banale. Prendiamo  $f = \chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$  e vediamo di quanta informazione abbiamo bisogno per trasmettere questa funzione. Fissato un grado di precisione  $j$ , fissato quindi uno spazio  $V_j$  nel quale considerare la funzione  $f$ ,  $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$  costituisce una base ortonormale di tale spazio. È evidente che la scelta  $j = -1$  sia sufficiente, possiamo infatti scrivere  $\chi_{[-1/2, 1/2]}(x) = \chi_{[-1/2, 0]} + \chi_{[0, 1/2]}$ . Quindi utilizzando due soli coefficienti si può ricostruire esattamente la funzione utilizzando il sistema  $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$ .

La collezione  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k}$  (a differenza di  $\{\phi_{j,k}(x)\}_{j,k}$ ) è una base ortonormale di  $L^2(\mathfrak{R})$  e quindi non occorre scegliere un grado di precisione per esprimere  $\chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$ . Per determinare i coefficienti rispetto a questa base bisogna calcolare i prodotti interni del tipo  $\langle \chi_{[-1/2, 1/2]}(x), \psi_{j,k}(x) \rangle$ , al variare di  $j, k$  in  $Z$ . Osserviamo subito però che

$$\langle \chi_{[-1/2, 1/2]}(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \neq 0 \quad \forall j < 0 \quad \text{se} \quad k = -1,$$

e quindi non si può esprimere tale funzione con un numero finito di coefficienti.

La stessa situazione si ripete per ogni funzione  $f$  costante a tratti e a supporto compatto. Tali funzioni sono esprimibili come combinazione lineare finita di elementi della base  $\{\phi_{j,k}\}_k$ , pur di scegliere  $j$  tale che  $2^{-j}$  è l'ampiezza dell'intervallo minimo su cui  $f$  è costante.

Se provassimo ad esprimere  $f$  rispetto alla base di ondine avremmo ancora infiniti coefficienti diversi da zero, poiché si verificherebbe la situazione appena descritta.

In teoria dei segnali bisogna spesso trasmettere, quindi scomporre, funzioni di questo tipo, in quanto costituiscono la prima fase per il passaggio al digitale di un segnale. Le ondine sembrerebbero quindi inadeguate per tali operazioni.

In realtà la soluzione ottimale risiede nel coniugare l'utilizzo delle due scritture. Nel senso che per passare da due distinte approssimazioni  $V_J$  e  $V_j$ , con  $J > j$ , possiamo utilizzare la formula (1.23). Questa è l'idea di fondo della codifica in sottobande, procedimento al quale dedicheremo il terzo capitolo.

Un secondo esempio è quello offerto dalla MRA di Shannon, lo spazio  $V_j$  è quello costituito dalle funzioni di  $L^2$  che hanno trasformata a supporto contenuto nell'intervallo

$[-2^j\pi, 2^j\pi]$ .  $V_0$  è generato dalla funzione

$$\Phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

e da tutte le sue traslate intere.

Per verificare che questa è una MRA non calcoleremo il filtro associato. Infatti  $\Phi$  è definita su tutto  $\mathfrak{R}$  e lo stesso varrà per le sue traslate intere, si dovrebbe quindi calcolare  $h_i \forall i \in Z$ . Preferiamo procedere allora tramite la formula (1.14). In tal modo calcoliamo direttamente la maschera del filtro, ci occorre però la trasformata della funzione di scala,

$$\hat{\Phi}(\omega) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega), \quad \hat{\Phi}(2\omega) = \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\omega)$$

e quindi la maschera del filtro è la seguente funzione  $2\pi$ -periodica

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\omega) \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Tale funzione soddisfa le ipotesi (1.17), (1.18), (1.19) del Teorema di Mallat, si conclude che  $\hat{\Phi}$  è una funzione di scala che genera una MRA.

Osserviamo che  $\hat{\Phi}$  corrisponde alla funzione di scala della MRA di Haar, quindi utilizzando tale MRA si avranno gli stessi vantaggi in termini di frequenza. Soprattutto è interessante notare che la maschera del filtro associato alla MRA è una funzione caratteristica, vedremo nel prossimo capitolo quali vantaggi comporta.

La funzione ondina che genera la base di Shannon viene calcolata utilizzando la formula (1.25), e vale quindi

$$\hat{\Psi}(\omega) = \begin{cases} e^{\frac{-i\omega}{2}}, & \text{se } \omega \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

A partire da questa si costruisce una base di ondine molto ben localizzate in termini di frequenza, ma poco utili per quel che riguarda lo spazio. Si avrà infatti

$$\Psi(x) = \frac{\sin 2\pi(x - \frac{1}{2})}{2\pi(x - \frac{1}{2})} - \frac{\sin \pi(x - \frac{1}{2})}{\pi(x - \frac{1}{2})}$$

che è una funzione che decade molto lentamente all'infinito.

Possiamo vedere queste due MRA come in una sorta di relazione di dualità, la base di Haar produce delle ondine che risultano ben localizzate nello spazio quanto quelle di Shannon lo sono in termini di trasformata. Vedremo in seguito i vantaggi che comporta avere un filtro come quello di Shannon.

L'ideale sarebbe quindi riuscire a fondere le due MRA per ottenere sia i vantaggi dell'una che i quelli dell'altra. Per far questo però bisogna rinunciare all'ortonormalità della base e cercare coppie di basi biortogonali.

Le ondine con maggior utilizzo nella pratica, in particolare per quel che riguarda le applicazioni a immagini, sono quelle trovate da Daubechies [cfr Daubechies pg 168, Burrus pg 76, Mallat pg]. Queste sono ondine a supporto compatto e quindi, grazie a quanto visto nella Proposizione 1.5.2, possono essere determinate a partire da un filtro passa basso con un numero finito di coefficienti non nulli.

Sono inoltre molto vantaggiose perchè offrono la miglior regolarità, intesa come numero di momenti nulli, che è possibile ottenere a partire da un certo numero di coefficienti del filtro. Quindi, fissato un numero di gradi di libertà, ossia scelto quanti valori non nulli avrà il filtro, queste ondine sono quelle che offrono il maggior numero di momenti nulli.

Partiamo da un filtro  $h_n$  che dovrà essere necessariamente FIR, per quanto detto nella Proposizione 1.5.2. La sua maschera  $\hat{h}(\omega)$  sarà quindi

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-i\omega n}$$

che è un polinomio trigonometrico con  $N$  termini.

Supponiamo di voler costruire una funzione ondina con  $p$  momenti nulli, la maschera allora potrà scriversi nella forma seguente, grazie alla Proposizione 1.5.1

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^p \hat{l}(\omega), \quad (1.32)$$

dove  $\hat{l}(\omega)$  è un polinomio di grado  $m$  e tale che  $\hat{l}(\pi) \neq 0$ .

Daubechies [cfr Daubechies cap6] ha sviluppato un algoritmo per il calcolo dei coefficienti di un filtro la cui maschera, scritta in forma (1.32), genera una base ortonormale di  $L^2(\mathfrak{R})$  con esponente  $m$  minimo per ogni valore  $p$  fissato.

Con il seguente teorema Daubechies [Mallat pg249... vedere dove in Daubechies] ha garantito l'ottimalità di tali filtri e il fatto che solo le ondine generate con tale metodo risultano essere ottimali.

**Teorema 1.6.1** (Filtri di Daubechies)

*Sia  $h_n$  un filtro specchio reale, tale che la sua maschera  $\hat{h}(\omega)$  abbia una radice di molteplicità  $p$  per  $\omega = \pi$ . Allora  $h_n$  ha almeno  $2p$  coefficienti non nulli. I filtri di Daubechies ne hanno esattamente  $2p$ .*

Un enunciato analogo vale per il filtro  $g$ , con la sola differenza che viene valutata la molteplicità dell'origine come radice di  $\hat{g}(\omega)$ .

La determinazione di tali coefficienti è piuttosto macchinosa ed il procedimento può essere trovato ad esempio in [Daubechies capitolo 6]. Nella pratica i coefficienti dei filtri di Daubechies sono raccolti in tabelle e grazie a questi si riescono a produrre ondine facilmente implementabili.

Si nota che nel caso la funzione  $\Psi$  abbia un solo momento nullo (caso  $p = 1$ ), l'ondina di Daubechies risulta essere quella generata dalla MRA di Haar.

Il caso di ondina di Haar è particolarmente interessante in quanto si dimostra essere l'unico caso di ondine simmetriche a supporto compatto. Esiste una sorta di stima del grado di regolarità per le ondine di Daubechies [cfr Daubechies cap 8] ed esistono particolari filtri di Daubechies che danno luogo a funzioni *più simmetriche* di altre.

Inoltre per le ondine di Daubechies si verifica che, al crescere dei momenti nulli indicato  $p$ , segue una crescita del grado di regolarità delle funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$ , come indicato nelle osservazioni a seguito della Proposizione 1.5.3.

Questi fattori spiegano il loro largo utilizzo nelle applicazioni pratiche, in particolare per quel che riguarda la codifica di immagini. Ad esempio le ultime edizioni del formato jpg si basano su una codifica costruita con queste ondine.

Presentiamo con maggior dettaglio il caso delle ondine D4, cioè le ondine di Daubechies con 2 momenti nulli. [cfr Sweldens Factoring, Daub pg 194] Solitamente si elencano i coefficienti del filtro normalizzati di modo che la loro somma dia  $\sqrt{2}$ ,

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

la maschera di tale filtro diventa quindi

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-i\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-i2\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-i3\omega}.$$

È immediato verificare ipotesi del Teorema 1.5.2, in quanto

$$\hat{h}(0) = \sum_{n=0}^3 h_n = \sqrt{2}, \quad e \quad \forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2,$$

La funzione di scala è quindi ben definita e si verifica che la la funzione ondina genera una base ortonormale di  $L^2(\mathfrak{R})$ , poiché risulta soddisfatta la condizione di Cohen.

Purtroppo non è possibile determinare l'espressione analitica di tale funzione. Vedremo meglio nei capitoli 3 e 4 che questo non è un problema poiché per molte applicazioni

basta conoscere i filtri.

Aumentando la lunghezza del filtro si aumenta il numero di momenti nulli della funzione, quindi il grado di regolarità per quanto accennato precedentemente. In [Daubechies cap 8] si trova la dimostrazione del fatto che per  $N$  abbastanza grande, i filtri di Daubechies a  $N$  coefficienti non nulli generano funzioni di scala  $\Phi_N$  e ondine  $\Psi_N$ , tali che

$$\Phi_N, \Psi_N \in C^{\mu N}(\mathfrak{R}), \quad \text{con } \mu \simeq 0.2.$$

Facciamo presente che per ridurre i costi computazionali si può utilizzare la maschera di questi filtri nella forma (1.32) e si possono trasmettere soltanto i coefficienti del polinomio  $l(\omega)$ . In tal modo, per le ondine di Daubechies, si dimezza il numero dei coefficienti necessari.

Nel prossimo capitolo vedremo alcune nozioni preliminari di teoria dei segnali, alla quale le ondine devono buona parte del loro sviluppo.

# Capitolo 2

## Cenni di Teoria dei Segnali

### 2.1 Introduzione

Per segnale si intende un'entità contenente un qualche tipo di informazione che verrà principalmente trasmessa, rielaborata, ricostruita. Matematicamente un segnale è una funzione  $f$  di un'opportuna variabile, per comodità si parlerà di funzione temporale e quindi di una sola variabile monodimensionale. Tutta la teoria è valida se si rileggono i segnali come funzioni di variabili multidimensionali. Nel caso di segnali a tempo continuo, parleremo di segnali analogici, dovremo quindi trattare la stessa ricchezza d'informazione che ha una funzione di variabile reale. Per gestire, modificare e memorizzare questa informazione, bisogna ricorrere ad una sua discretizzazione: il primo passo del passaggio al digitale. Si intuisce allora lo stretto legame con gli argomenti del primo capitolo, saper ricostruire una funzione a partire da dei coefficienti significa saper recuperare la pienezza d'informazione che stava nel segnale analogico, a partire da dei dati numerici che costituiscono la sua traccia digitale.

Per tutto il capitolo non tratteremo segnali qualunque, faremo sempre riferimento a segnali ad energia finita, diamo quindi la seguente definizione,

**Definizione 2.1.1** (Segnali ad Energia Finita)

*Un segnale, rappresentato da una funzione  $f$  è detto ad energia finita se avviene*

$$f \in L^2(\mathfrak{R}),$$

*per segnali analogici,*

$$f \in \ell^2(Z),$$

*per segnali digitali.*

L'entità che compie qualsiasi azione sui segnali è chiamata sistema. Tutto ciò che viene eseguito dal sistema  $S$  sul segnale in ingresso per produrre quello di uscita, verrà riletto in termini di azione di un operatore matematico. Ci sono diversi sistemi, che vengono classificati in base alle caratteristiche del corrispondente operatore. Prenderemo in esame soltanto alcune tipologie di sistema, quelle più inerenti al problema della scomposizione e ricostruzione.

## 2.2 Sistemi

Un sistema, come si è detto, trasforma il segnale in ingresso in un segnale in uscita che verrà chiamata risposta del sistema. Se il sistema possiede delle buone proprietà, si riuscirà ricondurre la sua risposta ad una somma di risposte elementari. Incominciamo ad introdurre alcune proprietà dei sistemi.

### Definizione 2.2.1 (Sistema Lineare)

*Un sistema  $S$  si dice lineare se il corrispondente operatore è lineare, se avviene cioè*

$$\begin{aligned}\forall f, g \in L^2(\mathfrak{R}) \quad S(f + g) &= S(f) + S(g), \\ \forall a \in \mathfrak{R}, \forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad S(af) &= aS(f).\end{aligned}$$

Per i sistemi lineari vale quindi un'ovvia proprietà di sovrapposizione, sarà possibile considerare l'azione del sistema su un segnale somma di altri segnali, come somma delle azioni che compie sui segnali che lo compongono.

### Definizione 2.2.2 (Sistemi Tempo-Invarianti)

*Un sistema si dice tempo-invariante se il corrispondente operatore matematico commuta con le traslazioni temporali, se avviene cioè*

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \text{ e } \forall t_0 \in \mathfrak{R} \quad (Sf)(t - t_0) = S(f(t - t_0)).$$

*Abbrevieremo con sistemi LTI i sistemi lineari e tempo-invarianti.*

Se un sistema è sia lineare che tempo-invariante il suo comportamento è completamente determinato dalla sua risposta all'impulso elementare, la  $\delta$  di Dirac.

**Proposizione 2.2.1** (Risposta elementare)

Sia  $S$  un sistema LTI, allora vale

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad S(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)k(t-z) dz, \quad (2.1)$$

dove  $k(t) = S(\delta(t))$ .

Scrivendo l'azione del sistema in termini di trasformata otteniamo che: dato  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  trasformate di Fourier dei segnali in ingresso ed in uscita, se il sistema  $S$  è un sistema LTI vale

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{k}(\omega),$$

dove  $\hat{k}(\omega) = \widehat{S(\delta)}(\omega)$

La dimostrazione si basa sulle proprietà dell'operatore  $S$  sul fatto che qualsiasi segnale può essere scritto

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\delta(t-z) dz.$$

Lavorare con i sistemi LTI è quindi estremamente conveniente, questa proposizione dimostra che l'azione di un qualsiasi sistema lineare è un prodotto di convoluzione con una funzione  $k$  fissata. Avviene cioè che per il sistema  $S$  LTI

$$\forall f \quad S(f) = (f \star k)$$

dove  $k$  identifica  $S$  e dove col simbolo  $\star$  si intende il prodotto di convoluzione tra funzioni. È inoltre altrettanto importante la rilettura dell'azione del sistema in termini di trasformata di Fourier. In tal caso per caratterizzare un sistema ci si riferisce sempre ad una funzione  $\hat{k}$ , ma l'azione del sistema è, per le proprietà della trasformata, un prodotto

$$\forall f \quad S(\hat{f}) = \hat{f}\hat{k} \text{ dove } \hat{k} \text{ caratterizza } S.$$

Ha senso quindi definire

**Definizione 2.2.3** (Risposta all'impulso elementare di un Sistema LTI)

Sia  $S$  un sistema lineare e tempo-invariante, chiamiamo risposta all'impulso elementare di  $S$ , la funzione  $k$  definita come in (2.1).

Un'altra proprietà per i sistemi è la *causalità*, i sistemi LTI causali sono quelli a cui corrispondono risposte elementari nulle per valori negativi del tempo.

Un sistema si dice *causale* se ad ogni istante di tempo il segnale in uscita dipende unicamente dai valori dell'ingresso al tempo presente ed ai tempi passati. Tale richiesta si traduce in condizioni sulla risposta all'impulso elementare.

**Definizione 2.2.4** (Sistema Causale)

Un sistema si dice *causale* se chiamata

$$k(t) = S(\delta_0), \quad \text{allora} \quad k(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

Un sistema si dice *stabile* se in risposta a segnali ad energia finita produce segnali ad energia finita. Deve cioè avvenire che

**Proposizione 2.2.2** (Sistemi stabili)

Un sistema LTI è stabile se e solo se chiamata  $k(t)$  la risposta all'impulso vale:

$$\|k\|_{L^1} < +\infty.$$

Prenderemo sempre in considerazione sempre sistemi LTI stabili, anche dove non specificato.

Tra i vari sistemi rivestono un ruolo di particolare importanza i *filtri*. Un filtro in teoria dei segnali è un particolare sistema LTI ed agisce quindi come un operatore di convoluzione.

Presentiamo il *filtro elementare* come un sistema che produce una risposta non distorta, cioè amplificata di un fattore  $A$  e ritardata di  $t_0$ , al segnale in ingresso. Che equivale a

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad S(f(t)) = Af(t - t_0),$$

uguaglianza che, riletta in termini di trasformata, diventa

$$\hat{g}(\omega) = Ae^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega).$$

La funzione  $h(\omega)$  che caratterizza la risposta del filtro è del tipo

$$\hat{h}(\omega) = Ae^{-i\omega t_0}.$$

Osserviamo che abbiamo a che fare con funzioni  $2\pi$ -periodiche, quindi la risposta all'impulso elementare di questo sistema è a tutti gli effetti una maschera di filtro. Questa maschera in  $[-\pi, \pi]$  è una funzione complessa di modulo costante  $\|h\| = A$  e fase lineare  $Ph(h) = -t_0\omega$ .

La maschera di un filtro elementare è un monomio trigonometrico, quindi il filtro corrispondente è costituito da una successione ovunque nulla salvo il termine  $h_{-t_0} = A$ . Da quanto visto nel capitolo precedente e da quanto detto sopra, le maschere dei filtri possono essere ricondotte a somma di filtri elementari o a funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$  periodiche. Per *filtro ideale* si intende un sistema che opera come la maschera di filtro elementare su alcune frequenze, annullandosi sulle rimanenti. Ecco qui in seguito alcuni esempi di filtri ideali.

**Definizione 2.2.5** (Alcuni Filtri Ideali)

Un filtro passa basso ideale è rappresentato nell'intervallo  $[-\pi, +\pi]$  da una risposta all'impulso elementare del tipo

$$\hat{h}(\omega) = Ae^{-i\omega t_0} \chi_{[-\omega_c, +\omega_c]} \quad 0 \leq \omega_c \leq \pi.$$

Un filtro passa alto ideale è rappresentato nell'intervallo  $[-\pi, +\pi]$  da una risposta all'impulso elementare del tipo

$$\hat{h}(\omega) = Ae^{-i\omega t_0} \chi_{[-\pi, -\omega_c] \cup [+ \omega_c, \pi]} \quad 0 \leq \omega_c \leq \pi.$$

Un filtro passa-banda ideale è rappresentato nell'intervallo  $[-\pi, +\pi]$  da una risposta all'impulso elementare del tipo

$$\hat{h}(\omega) = Ae^{-i\omega t_0} \chi_{[-\omega_2, -\omega_1] \cup [+ \omega_1, + \omega_2]} \quad 0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \pi.$$

Osserviamo che tra questi ritroviamo i filtri associati alla MRA di Shannon.

**Definizione 2.2.6** (Filtri a risposta finita)

Un filtro viene chiamato FIR (Finite Impulse Response), se possiede una successione di coefficienti finita, se è quindi esprimibile come somma di filtri elementari.

Le maschere dei filtri ideali, come quelle della Definizione 2.2.5, sono delle funzioni di  $L^2$   $2\pi$ -periodiche e sono quindi esprimibili come serie di Fourier. I coefficienti di questa serie, che saranno in una quantità infinita diversi da zero, costituiscono i filtri associati. Si parlerà quindi di filtri IIR (Infinite Impulse Response). Nelle applicazioni pratiche vengono utilizzati filtri FIR che in termini di trasformata hanno un comportamento abbastanza simile a quelli ideali, ma che sono dei polinomi trigonometrici. Ad esempio, per simulare il comportamento di un filtro ideale passa basso bisogna prendere funzione periodiche la cui trasformata nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  lascia pressochè inalterate le frequenze comprese tra  $[-\omega_c, +\omega_c]$ , e smorza quelle all'esterno. Le maschere per filtri di questo tipo sono polinomi trigonometrici e trovano largo impiego nella pratica. Ad esempio vengono utilizzate le costruzioni di Butterworth e Chebyshev, basate sugli omonimi polinomi [cfr Bertoni, Grossi]. Allo stesso modo si possono definire filtri FIR passa alto e passa banda.

## 2.3 Conversione Analogico-Digitale e Digitale-Analogico

Per ricevere, immagazzinare ed eventualmente modificare un segnale bisogna ricondurlo prima ad una stringa finita di valori scelti tra un insieme finito di numeri. Passare

quindi dall'analogico al digitale. È importante che questo passaggio al digitale permetta di ricostruire con una buona approssimazione il segnale analogico. I sistemi che operano la conversione analogico-digitale sono essenzialmente il *campionatore* e il *quantizzatore*. Campionare un segnale a tempo continuo significa ricondurlo ad una successione finita di valori che il segnale assumeva prima di venire processato dal *campionatore*.

**Definizione 2.3.1** (Campionatore Uniforme)

Un sistema  $S$ , campionatore di ampiezza  $T$ , è così definito

$$S(f) = \{f(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Il sistema così definito è detto *campionatore uniforme*, poiché i valori della funzione vengono presi a distanza dello stesso intervallo di tempo. Ovviamente questo tipo di sistema è lineare e non è l'unico tipo di campionatore realizzabile. In questo lavoro prenderò in considerazione solo il campionatore uniforme per le sue dirette applicazioni al Teorema di Shannon.

Introduciamo ora una notazione tipica della teoria dei segnali,

**Definizione 2.3.2** (Segnali a Banda Limitata)

Un segnale  $f \in L^2(\mathbb{R})$  si dice a banda limitata se  $\text{supp}(\hat{f})$  è compatto

Dal segnale in uscita del campionatore non è in generale possibile ricostruire il segnale originale, tuttavia sotto opportune ipotesi di regolarità per il segnale, con un opportuno campionatore questo è possibile. Vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 2.3.1** (Teorema del campionamento di Shannon)

Sia  $f$  una funzione di  $L^2(\mathbb{R})$  a banda limitata e sia  $\Omega$  tale che  $\text{supp}(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega]$ , sia  $T$  l'ampiezza di campionamento e  $T \leq \pi/\Omega$ .

Allora vale

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\sin \pi(t/T - n)}{\pi(t/T - n)}, \quad (2.2)$$

con la serie che converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}$ . Inoltre

$$\|f\|_2^2 = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(nT)|^2. \quad (2.3)$$

Questo teorema ci garantisce la possibilità di riscrivere  $f$  a partire dai suoi campionamenti, purchè vengano presi ad una ampiezza appropriata. Il valore dell'ampiezza di campionamento richiesta dal teorema, cioè  $\frac{\pi}{\Omega}$ , viene chiamato *tasso di Nyquist*.

DIMOSTRAZIONE [cfr Soardi cap VII].

Chiamiamo  $\varphi$  il prolungamento  $(2\pi T^{-1})$ -periodico della funzione  $\hat{f}$  a tutto  $\mathfrak{R}$ , cioè

$$\varphi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi T^{-1}). \quad (2.4)$$

Ovviamente varrà  $\hat{f}(\omega) = \varphi(\omega)$ ,  $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$ , segue  $\varphi \in L^2(-\pi/T, \pi/T)$ , e così possiamo scriverne lo sviluppo in serie di Fourier, ossia in  $L^2$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ikT\omega},$$

con i coefficienti dati da

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \varphi(\omega) e^{ikT\omega} d\omega$$

ma poiché nell'intervallo di integrazione, come detto sopra,  $\hat{f}$  e  $\varphi$  coincidono

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(\omega) e^{ikT\omega} d\omega.$$

Osserviamo che  $T$  è stato scelto in maniera tale che

$$\text{supp}(\hat{f}(\omega)) = [-\Omega, \Omega] \subset [-\pi/T, \pi/T], \quad (2.5)$$

possiamo quindi scrivere  $h_k$  come un integrale su tutto  $\mathfrak{R}$

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ikT\omega} d\omega = T f(kT),$$

con l'ultima uguaglianza che segue dal teorema di inversione della trasformata di Fourier.

Inoltre per il Teorema di Plancherel si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 &= \|\varphi\|_2^2, \\ T^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(kT)|^2 &= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\varphi(\omega)|^2 d\omega, \\ T^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(kT)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \\ T^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(kT)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

e con questo si dimostra la (2.3).

Per dimostrare la (2.2), partiamo dal Teorema di Inversione per la trasformata di Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

ma poiché vale  $\hat{f}(\omega) = \varphi(\omega)$ ,  $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$  e a  $\varphi$  possiamo sostituire la sua serie di Fourier,

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) e^{-ikT\omega} d\omega,$$

che implica

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i(t-kT)\omega} d\omega$$

Risolvendo l'integrale a secondo membro si ottiene quindi

$$f(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \frac{\sin \pi(t/T - k)}{\pi(t/T - k)},$$

che è la (2.3). La serie a secondo membro converge e lo si verifica applicando la disuguaglianza di Schwartz e poi la (2.3).

Notiamo che i campionamenti di  $f$  non sono in generale i coefficienti di Fourier di  $f$ . Per ottenere questi valori, basta servirsi di un campionatore uniforme che opera ad una frequenza superiore od uguale al tasso di Nyquist.

Questo teorema riguarda solo segnali a banda limitata, un tipo di segnale molto particolare. Tuttavia nella pratica i segnali vengono approssimati con segnali a banda limitata, ad esempio per quel che riguarda le onde sonore, la banda che viene considerata è costituita dalle frequenze che l'orecchio umano percepisce.

Ricordiamo che avere una trasformata a supporto compatto (e quindi una funzione a banda limitata) è proprio delle funzioni analitiche, funzioni che non possono avere supporto compatto. Qui nascono i problemi, infatti ci si trova a dover gestire funzioni che campionate producono un'infinità di coefficienti. Per contro, in qualsiasi applicazione ci si deve ridurre a funzioni limitate nel tempo, di modo che la successione  $\{f(n\frac{\pi}{\Omega})\}_{n \in \mathbb{Z}}$  abbia un numero finito di valori non nulli.

Il teorema quindi non è direttamente utilizzabile in applicazioni, in quanto troncature della banda della funzione significa dover gestire un segnale infinito nel tempo.

Per qualsiasi utilizzazione pratica di questi risultati sarà quindi necessario operare dei troncamenti sulla funzione (oltre che sulla trasformata se necessario) ed utilizzare la formula in maniera approssimata. Sostituiamo a  $f$  un segnale  $f_j$  a banda limitata definito come  $\hat{f}_j = \hat{f} \chi_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}$ . Questa operazione consiste nel proiettare la funzione  $f$  sullo spazio  $V_j$  della MRA di Shannon. La funzione di scala di tale MRA è

$$\Phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

e l'operatore di proiezione  $P_j$  sarà

$$P_j f(t) = f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(t), \text{ con } \text{supp}(\hat{f}_j) \subseteq [-2^j \pi, 2^j \pi]$$

Per quanto detto prima la funzione  $f_j$  non può avere supporto compatto. In effetti la proiezione  $P_j$  non opera dei troncamenti sulla funzione  $f$ , per rendersene conto basta guardare la funzione  $\Phi$  che ha supporto illimitato. Sarà quindi necessario considerare solo un numero finito di campionamenti, a costo di un'ulteriore approssimazione.

Questo procedimento si può ripetere rispetto a qualsiasi funzione di scala, in tal modo si ottengono approssimazioni differenti ma la possibilità di ricostruire la funzione è vincolata ai coefficienti  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ .

Per conoscere tali coefficienti bisognerebbe disporre dell'espressione analitica della funzione  $f$ . Purtroppo la funzione è nota solo per il suo campionamento. Nella maggior parte dei casi questo problema si risolve sostituendo direttamente a questi valori il campionamento della funzione  $f$ . Questa scelta può essere intuitivamente giustificata dal fatto che comunque si sta procedendo ad un'approssimazione del segnale.

Osserviamo che per migliorare l'approssimazione si potrebbe prendere come coefficienti una combinazione di campionamenti, (vedremo nei capitoli seguente come implementare questa scelta). Nel seguito assumeremo sempre di poter disporre dei coefficienti  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ , consapevoli di dover sostituire a questi i campionamenti della funzione o una loro combinazione.

Vediamo ora che effetti produrrebbe un campionamento ad una frequenza inferiore del tasso di Nyquist, ossia se  $T > \pi/\Omega$ . Intuitivamente l'informazione di cui si disporrebbe non sarebbe sufficiente per ricostruire il segnale in quanto i campionamenti non sarebbero abbastanza fitti. Nella dimostrazione del Teorema di Shannon verrebbe meno l'ipotesi che implica (2.5), anzi si avrebbe

$$[-\pi/T, \pi/T] \subset [-\Omega, \Omega],$$

e quindi la funzione  $\varphi$ , definita come in (2.4) non coinciderebbe più con  $\hat{f}$  nell'intervallo  $[-\pi/T, \pi/T]$ , poiché vi sarebbero delle sovrapposizioni.

Infatti, ad un campionamento con un'ampiezza eccessiva, segue che  $\forall \omega \in [-\Omega, \Omega]$  la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi T^{-1}),$$

possiede diversi termini non nulli specialmente vicino alle estremità del supporto.

Questa interferenza viene chiamata *aliasing*, o *equivocanza*, e produce una distorsione

alle estremità del segnale.

L'aliasing viene rimossa riducendo l'ampiezza del supporto del segnale, applicando cioè un filtro passa basso che dimensiona il supporto in proporzione dell'ampiezza di campionamento. Un filtro anti-aliasing è quindi un sistema che in termini di trasformata è rappresentato da una funzione caratteristica  $\chi_{[-2^j, 2^j]}(\omega)$ , proprio come nella MRA di Shannon.

Osserviamo che prima di campionare un segnale è sempre bene applicare un filtro anti-aliasing in quanto a priori non si conosce l'ampiezza di  $\text{supp}(\hat{f})$ . Così facendo si considerano solo le frequenze del segnale all'interno di una banda stabilita, questo evita di produrre aliasing.

Ad esempio, nel caso delle onde sonore l'aliasing produce dei suoni metallici nel segnale ricostruito. Per evitare che questo avvenga si applica un filtro anti-aliasing, che taglia le frequenze del segnale ad una certa soglia, spesso si prende la banda di frequenza percettibile dall'orecchio umano. A questo punto si lavora con un segnale a banda limitata e nota, indipendentemente dal tipo di segnale che verrà ricevuto, quindi un opportuno campionatore rende possibile la ricostruzione del segnale nelle frequenze scelte. Se non si utilizzasse il filtro anti-aliasing accadrebbe che frequenze non percettibili, perchè troppo alte o troppo basse per il nostro orecchio, produrrebbero dei disturbi nelle frequenze udibili.

Osserviamo che più ampia è la banda di frequenza considerata e maggiore è il numero di campioni che occorre prendere per non produrre aliasing. È quindi estremamente importante ottimizzare la scelta del filtro anti-aliasing per evitare di dover gestire troppi dati senza però escludere troppi valori delle frequenze.

Facciamo presente che il fenomeno dell'aliasing in alcuni casi può essere positivo, ad esempio nelle immagini l'effetto che produce è una sfumatura dei contorni. Per scrivere una lettera di un determinato carattere allora si induce l'aliasing in alcune parti dell'immagine renderne meno frastagliati i bordi.

Grazie ai risultati finora ottenuti ci si potrebbe illudere di avere uno strumento che nella pratica permetta di ricostruire esattamente un segnale, purtroppo non è così perchè ci si imbatte in un altro problema. Una volta campionato il segnale, nasce la necessità di immagazzinare gli opportuni campionamenti. Soltanto conoscendo esattamente questi valori si può ricostruire la funzione grazie al Teorema di Shannon. Il problema evidente sta nell'impossibilità di misurare ed immagazzinare questi valori. Un numero reale, o complesso che sia, in generale possiede infinite cifre e queste dovranno essere troncate nell'atto della misurazione o della scrittura in una stringa di bit. Per risolvere questo

problema si utilizza un altro sistema: il *quantizzatore*.

Il quantizzatore è un sistema che agisce sul codominio del segnale, sostituendo alla funzione un'altra che è vincolata ad assumere soltanto un insieme finito di valori. Il caso più generale di quantizzatore è il seguente

**Definizione 2.3.3** (Quantizzatore)

Siano  $\{x_1 \dots x_n\}$   $n$  numeri reali fissati. Il quantizzatore  $Q$  è così definito,

$$\forall f \quad Q(f)(t) = x_i \quad \text{dove} \quad x_i \text{ t.c.} \quad \min_{x_i \in \{x_1 \dots x_n\}} |f(t) - x_i|.$$

Osserviamo che, come per il campionatore, esistono diversi tipi di quantizzatore. A fare la differenza tra l'uno e l'altro è la distribuzione dei valori  $\{x_1 \dots x_n\}$ , se questi sono equidistanti l'uno dall'altro, il quantizzatore è detto uniforme. Se invece interessa maggiormente il comportamento della funzione in prossimità di alcuni valori rispetto ad altri, è opportuna una diversa distribuzione dei valori  $\{x_1 \dots x_n\}$ , distribuzione che si concentra attorno alle zone di interesse.

Filtri, campionatori e quantizzatori sono ovviamente componibili, ad esempio se facciamo agire nell'ordine:

- i) filtro anti-aliasing,
- ii) campionatore,
- iii) quantizzatore,

si ottiene un convertitore analogico-digitale, cioè un sistema che associa ad un segnale analogico in ingresso, una successione finita di valori scelti all'interno di quelli ammessi dal quantizzatore.

Per quanto si possa campionare ad una frequenza elevata o aumentare il numero dei valori ammessi dal quantizzatore, questa conversione risulta irreversibile. Non si può, in generale, ricostruire il segnale analogico di partenza a partire dal segnale digitalizzato, questo a causa del quantizzatore, che rende impossibile l'applicazione del Teorema di Shannon, anche per segnali rappresentati da funzioni analitiche.

Esistono convertitori digitale-analogico, e sono molto diffusi, ma tale operazione risulta una ricostruzione approssimata del segnale analogico originale.

# Capitolo 3

## Ricostruzione Perfetta

### 3.1 Algoritmo di Ricostruzione Perfetta

La finalità principale della teoria delle ondine è quella di scomporre e ricostruire funzioni a partire da coefficienti numerici. Si vede quindi un'immediata applicazione in teoria dei segnali, dove la conversione analogico-digitale rispecchia il problema della scomposizione e la conversione digitale-analogico quello della ricostruzione.

Partiamo da un segnale analogico  $f$ , cerchiamo di ottenere dei coefficienti che caratterizzino univocamente il segnale. Utilizziamo lo strumento più raffinato che abbiamo sviluppato : una MRA di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Chiamiamo, riprendendo le notazioni del primo capitolo  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  la base ortonormale di  $V_j$ ,  $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$  la base ortonormale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ .

#### Definizione 3.1.1

Data  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ , definiamo la successione  $\{a_0[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  come

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0[n] = \langle f(t), \phi_0(t - n) \rangle = f \star \bar{\phi}(n),$$

I coefficienti  $a_0[n]$  costituiscono una successione, abbiamo scelto questa notazione al posto dell'usuale  $a_{0,n}$  per agevolare la scrittura.

Poiché  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale di  $V_0$ , si ha

$$\forall f \in V_0, \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_0[n] \phi_{0,n}(t),$$

Inoltre  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R})$  ha senso definire  $f_0 = P_0(f)$ , la proiezione su  $V_0$  di  $f$ , ovvero la funzione di  $V_0$  che meglio approssima  $f$ ,

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}), \quad f_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f(t), \phi_0(t-n) \rangle \phi_{0,n}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_0[n] \phi_{0,n}(t).$$

In maniera analoga possiamo definire i coefficienti  $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definizione 3.1.2**

Data  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ , definiamo la successione  $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  come

$$a_j[n] = \langle f(t), \phi_j(t-n) \rangle = f \star \phi_j(n). \quad (3.1)$$

Inoltre definiamo  $f_j = P_j(f)$  la proiezione su  $V_j$  di  $f$ , cioè

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}), \quad f_j(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f(t), \phi_j(t-n) \rangle \phi_{j,n}(t).$$

Le successioni  $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  offriranno una visione parziale della funzione  $f$  in quanto, a partire da dei coefficienti  $a_j$  non si potrà ricostruire la funzione iniziale con una precisione superiore a quella offerta dallo spazio  $V_j$ . Per migliorare le cose è necessario sfruttare anche i coefficienti ondina di  $f$ .

**Definizione 3.1.3** (Coefficienti ondina di una funzione)

Siano le funzioni  $\{\psi_{j,n}\}_{j,k}$  una base ortonormale di ondine di  $L^2(\mathfrak{R})$ , allora ha senso associare

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \rightarrow \{d_j[n]\}_{j,n \in \mathbb{Z}} \quad \text{dove} \quad d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle. \quad (3.2)$$

La collezione  $\{d_j[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , fissato un certo valore  $j$ , non caratterizza la funzione ma, come vedremo, completa l'informazione offerta dalla successione  $\{a_j[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Osserviamo che data  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ , possiamo collegare  $f_0$  a  $f_J$  con  $J > 0$  grazie alla relazione (1.23) cioè partendo da

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f_J = f_{J-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{J-1,k} \rangle \psi_{J-1,k},$$

possiamo scrivere

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f_J = f_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}; j=0}^{j=J-1} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

e quindi

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f_J = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_0[k] \phi_{0,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}; j=0}^{j=J-1} d_j[k] \psi_{j,k}.$$

Ora possiamo definire l'insieme dei coefficienti che associamo ad un segnale.

**Definizione 3.1.4** (Codifica di un segnale)

Chiameremo l'insieme dei coefficienti necessari alla ricostruzione del segnale  $f$ , codifica di  $f$ .

Allo stesso segnale possono essere associate diverse codifiche, tra le codifiche che portano la stessa ricostruzione si preferisce quella col minor numero di coefficienti. Introduciamo ora due sistemi che operano su successioni di coefficienti, quindi su segnali digitali.

**Definizione 3.1.5** (Upsampler)

Chiamiamo *upsampler* il sistema che al segnale digitale  $x[n]$  in ingresso associa il segnale  $\tilde{x}[n]$  così definito

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[p], & \text{if } n=2p; \\ 0, & \text{if } n=2p+1. \end{cases}$$

L'upsampler è un sistema che tra due valori consecutivi della successione in ingresso introduce un termine nullo. Grazie all'azione di questo sistema i segnali finiti raddoppiano la loro lunghezza.

**Definizione 3.1.6** (Downsampler o Decimatore)

Chiamiamo *downsampler* (o decimatore) il sistema che al segnale digitale  $x[n]$  in ingresso associa il segnale  $\tilde{x}[n]$  così definito

$$\tilde{x}[n] = x[2n].$$

La decimazione produce un segnale che considera solo un valore su due del segnale in ingresso. Con l'azione di questo sistema i segnali finiti risultano dimezzati in lunghezza.

**Definizione 3.1.7**

Dato il segnale  $x[n]$ , chiamiamo  $\bar{x}[n]$  il segnale così definito

$$\bar{x}[n] = x[-n].$$

Osserviamo che l'azione di questo sistema sul segnale digitale consiste nell'invertire l'ordine della stringa.

Utilizzando questi tre sistemi è possibile, partendo dai coefficienti  $\{a_j[n]\}_{n \in N}$  e  $\{d_j[n]\}_{n \in N}$ , determinare la successione  $\{a_{j+1}[n]\}_{n \in N}$ , successione dei coefficienti della proiezione di  $f$  su  $V_{j+1}$ . Il seguente teorema, dovuto a Mallat [ Mallat Thm 7.6], fornisce gli algoritmi necessari.

**Teorema 3.1.1** (Scomposizione e Ricostruzione in una MRA)

Sia una MRA di  $L^2(\mathfrak{R})$  e siano  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  i due filtri ad essa collegati, definiti in (1.11) e in (1.30). Preso un qualsiasi segnale  $f$  allora vale per le sue successione di coefficienti la seguente formula di scomposizione:

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p]a_{j+1}[n] = a_{j+1} \star \bar{h}[2p], \quad (3.3)$$

$$d_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p]a_{j+1}[n] = a_{j+1} \star \bar{g}[2p]. \quad (3.4)$$

Vale inoltre la seguente formula di ricostruzione,

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[p-2n]a_j[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[p-2n]d_j[n] = \check{a}_j \star h[n] + \check{d}_j \star g[n]. \quad (3.5)$$

Osserviamo che le fasi di scomposizione in coefficienti di scala e in coefficienti di ondina, si realizzano con un prodotto di convoluzione rispettivamente con il filtro passa basso  $h$  e passa alto  $g$ , seguiti da un operazione di decimazione su entrambe le bande. Per facilitare la dimostrazione, nella quale utilizzeremo le maschere dei filtri, associeremo al segnale la sua trasformata di Fourier discreta, ossia la serie complessa  $2\pi$ -periodica così definita:

**Definizione 3.1.8** (Trasformata di un segnale digitale)

Sia  $\{s_n\}_n \in \ell^2$ , allora definiamo la sua trasformata nella maniera seguente

$$s(\omega) = \sum_n s_n e^{-i\omega n}$$

#### DIMOSTRAZIONE

Partiamo da un segnale digitale  $\{s_n\}_n$  ad energia finita, la scomposizione e la successiva ricostruzione su questo segnale possono essere schematizzato nelle tre fasi seguenti.

- i) La prima fase è tutta dedicata alla scomposizione del segnale e si basa sui prodotti di convoluzione con i coniugati dei filtri passa basso  $\bar{h}$  e passa alto  $\bar{g}$ . L'azione del filtro passa basso  $\{\bar{h}_n\}_n$  su  $s(\omega)$  sarà semplicemente il prodotto con la maschera  $\widehat{\bar{h}}(\omega)$ .

Questo equivale a

$$\begin{aligned} s_1(\omega) &= s(\omega)\widehat{\bar{h}}(\omega), \\ s_2(\omega) &= s(\omega)\widehat{\bar{g}}(\omega). \end{aligned}$$

Osserviamo che per filtri FIR e segnali digitali  $\widehat{h}(\omega)$  e  $s(\omega)$  sono entrambi polinomi trigonometrici.

- ii)** La seconda fase termina la scomposizione dei segnali e li prepara alla ricostruzione. In questa fase vengono applicati su entrambe le bande prima un Decimatore e poi un Upsampler. L'azione del decimatore su una stringa, come scritto nella Definizione 3.1.6, consiste dimezzare la lunghezza della stringa mantenendo solamente i valori che compaiono nelle posizioni di indice pari, cioè  $\{s_n\}_n \rightarrow \{s_{2n}\}_n$ . In termini di maschere il decimatore opera così

$$s(\omega) \rightarrow s(\omega/2) + s(\omega/2 + \pi).$$

L'Upsampler, come scritto in Definizione 3.1.5, raddoppia la lunghezza di una stringa inserendo un valore nullo tra due valori della stringa iniziale, ossia

$$\{s_n\}_{n=1,\dots,N} \rightarrow \{t_n\}_{n=1,\dots,2N} \text{ dove } t_{2n} = s_n, t_{2n+1} = 0$$

In termini di maschere l'azione di questo sistema può essere interpretata come

$$s(\omega) \rightarrow s(2\omega).$$

Quindi l'azione di un decimatore seguito da un upsampler diventa

$$s(\omega) \rightarrow s(\omega) + s(\omega + \pi), \quad (3.6)$$

Eseguiamo quindi Decimazione seguita da Upsampling ad entrambe le bande del segnale.

$$\begin{aligned} s_1^d(\omega) &= \widehat{h}(\omega)s(\omega) + \widehat{h}(\omega + \pi)s(\omega + \pi), \\ s_2^d(\omega) &= \widehat{g}(\omega)s(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi)s(\omega + \pi). \end{aligned}$$

In effetti i nuovi polinomi trigonometrici  $s_1^d(\omega)$  e  $s_2^d(\omega)$  hanno periodo dimezzato.

- iii)** Per ricomporre definitivamente il segnale si utilizzano il filtro  $h$ , sulla banda bassa e  $g$ , sulla banda alta. In termini di maschere verranno prodotti due segnali che indicheremo ancora con  $s_1(\omega)$  e  $s_2(\omega)$ , nonostante siano differenti dai precedenti.

$$\begin{aligned} s_1(\omega) &= [\widehat{h}(\omega)s(\omega) + \widehat{h}(\omega + \pi)s(\omega + \pi)]\widehat{h}(\omega), \\ s_2(\omega) &= [\widehat{g}(\omega)s(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi)s(\omega + \pi)]\widehat{g}(\omega), \end{aligned}$$

Dopodichè i due segnali verranno sommati come in formula (3.5). Se raccogliamo  $s(\omega)$  e  $s(\omega + \pi)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} s_1(\omega) + s_2(\omega) &= s(\omega)[\widehat{h}(\omega)\widehat{h}(\omega) + \widehat{g}(\omega)\widehat{g}(\omega)] + \\ & s(\omega + \pi)[\widehat{h}(\omega + \pi)\widehat{h}(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi)\widehat{g}(\omega)]. \end{aligned}$$

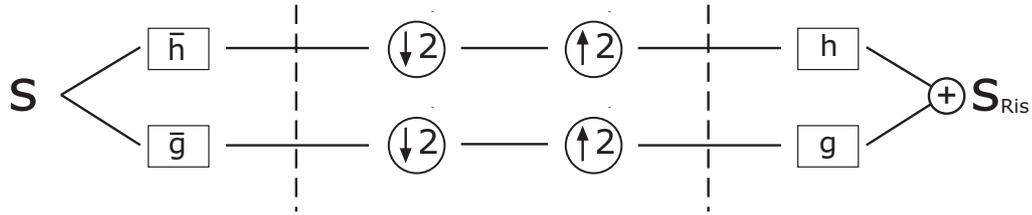


Figura 3.1: Schema di Codifica in Sottobande per Algoritmo di Ricostruzione perfetta di Mallat. Le linee tratteggiate dividono lo schema nelle tre fasi della dimostrazione del Teorema 3.1.1.

Per avere che la somma di questi segnali sia esattamente il segnale iniziale dovrà valere

$$\begin{cases} \widehat{h}(\omega)\widehat{h}(\omega) + \widehat{g}(\omega)\widehat{g}(\omega) = 1 \\ \widehat{h}(\omega + \pi)\widehat{h}(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi)\widehat{g}(\omega) = 0 \end{cases} .$$

Se queste condizioni sono verificate il teorema è dimostrato.

Osserviamo che la prima evita che il segnale ricomposto sia distorto in ampiezza e la seconda elimina l'aliasing che si produrrebbe nel procedimento.

Ricordiamo allora l'ipotesi aggiuntiva che  $h, g$  sono filtri specchio coniugati, poiché provengono da una MRA. Se sostituiamo a  $\widehat{g}$  l'espressione in (1.29), dato che banalmente  $\widehat{h}(\omega) = \widehat{h}(\omega)$ , entrambe le condizioni risultano verificate dal filtro  $\widehat{h}$ , infatti questo soddisfa (1.21), a meno di un cambiamento nella normalizzazione.

Lo schema di figura 3.1 rappresenta il processo descritto nella dimostrazione. In teoria dei segnali si fa largo utilizzo di questi disegni, come vedremo meglio nel seguito.

Il teorema divide lo schema in due sole fasi, la scomposizione e la ricostruzione. Ha quindi senso iterare la formula (3.3) per eseguire scomposizioni successive.

Supponiamo infatti di voler trasmettere l'approssimazione  $f_J = P_J(f)$ , ma di voler ridurre la quantità di informazione necessaria nella codifica. Basterà calcolare i coefficienti  $\{a_J[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  e trasmettere, sfruttando la (3.4) i coefficienti di ondina a livello  $J - 1$ , l'insieme  $\{d_{J-1}[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Questi, per ricostruire  $f_J$ , necessitano dei coefficienti  $\{a_{J-1}[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , che si possono calcolare utilizzando la (3.3).

Invece di trasmettere quest'ultimi, scegliamo di iterare il procedimento e di calcolare i coefficienti  $\{d_{J-2}[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , i coefficienti  $\{d_{J-3}[n]\}_{n \in \mathbb{N}} \dots \{d_k[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{a_k[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , applicando sempre le formule (3.4) e (3.3). A questo punto disponiamo di una nuova codifica del segnale iniziale costituita da  $\{d_j[n]\}_{j=k..J, n \in \mathbb{N}}$  e  $\{a_k[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Lo schema di figura 3.2 seguente rappresenta il processo di scomposizione appena descritto.

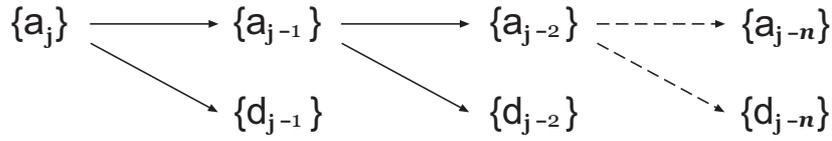


Figura 3.2: Iterazione della fase di scomposizione

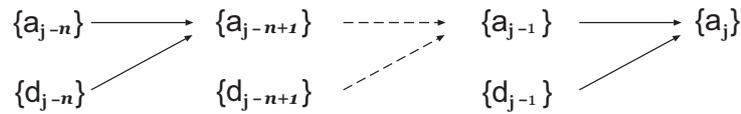


Figura 3.3: Iterazione della fase di ricostruzione

Per recuperare  $\{a_j[n]\}_{n \in N}$ , basterà applicare la (3.5) a  $\{a_k[n]\}_{n \in N}$  e a  $\{d_k[n]\}_{n \in N}$ , per ottenere  $\{a_{k+1}[n]\}_{n \in N}$ , che unito a  $\{d_{k+1}[n]\}_{n \in N}$  nella (3.5), produrrà la successione  $\{a_{k+1}[n]\}_{n \in N}$ . Iterando il procedimento si riesce a ricostruire esattamente la codifica iniziale  $\{a_j[n]\}_{n \in N}$ . Schematizzando si ottiene la figura 3.3

Ora che abbiamo chiaro il processo di scomposizione e ricostruzione ha senso dare la seguente definizione

**Definizione 3.1.9** (Codifica in ondine ortogonali)

Chiamiamo codifica in ondine ortogonali di un segnale  $f$  la sua rappresentazione tramite

$$\{\{d_j[n]\}_{j=1..J, n \in N}, \{a_k[n]\}_{n \in N}\} \quad (3.7)$$

Bisogna ora indagare i vantaggi che giustificano tutti i calcoli necessari per ottenere una codifica in ondine ortonormali. Infatti il numero dei coefficienti da trasmettere non si riduce affatto con una tale scomposizione.

I vantaggi sono principalmente due e sono entrambi collegati alle applicazioni pratiche. Nella pratica infatti si operano troncamenti e approssimazioni alle successioni dei coefficienti. Il procedimento descritto diviene allora un modo di produrre coefficienti significativi per escluderne altri nella fase di approssimazione. I coefficienti  $\{d_j\}_{j,n}$  del dettaglio della funzione si riferiscono a funzioni base di differente localizzazione al variare di  $j$ . Avverrà quindi che dove il segnale iniziale resta pressochè costante molti coefficienti ondina saranno ininfluenti e quindi eliminabili in fase di approssimazione. In tal caso una scrittura più grossolana del segnale, sviluppata cioè in uno spazio di

approssimazione  $V_{j-1}$ , si adatta allo stesso modo al segnale.

Al contrario, dove il segnale varia in modo più rapido i coefficienti ondina saranno quelli che si adattano meglio alla descrizione del segnale. In questi intervalli, quando si passa ad un'approssimazione di livello inferiore, è necessario mantenere i coefficienti  $d_{j-1}$  che costituiscono il dettaglio dell'informazione.

Se si sceglie un' unica soglia sotto la quale trascurare i coefficienti, sia per la codifica in ondine ortonormali, che per la successione originale, si ottiene una approssimazione più compatta e che permette una ricostruzione migliore con la codifica. Si avranno effettivi vantaggi se  $a_j \approx \tilde{a}_j$  e la codifica approssimata risulta meno onerosa, in termini di coefficienti, della codifica in ondine ortonormali.

Questa procedura di scomposizione può essere schematizzata in figura 3.4.

Per la ricostruzione verranno utilizzati i coefficienti approssimati nello schema di figura 3.5.

Il secondo vantaggio risiede nella relativa economicità di calcolo di tale codifica. Osserviamo che in termini di trasformata il calcolo dei coefficienti ondina si riduce al prodotto con un filtro passa alto. Utilizzando quindi un filtro passa alto e uno passa basso, e un altro paio di sistemi di facile realizzazione per segnali digitali si costruisce tale struttura.

A questo punto si aprono due strade che portano ad ulteriori sviluppi nella codifica dei segnali. Si può estendere il risultato della codifica dei segnali non solo su due bande, quella alta e quella bassa ma su più bande, separando il segnale anche su delle frequenze intermedie mediante l'uso di diversi filtri passa-banda. Il risultato è quindi un segnale diviso su più canali distinti.

Oppure si procede senza aumentare il numero di canali, cercando di ridurre il numero dei coefficienti significativi per la ricostruzione. Per ottenere questo si costruisce una codifica che si basa su una coppia di filtri per la scomposizione e una seconda coppia,

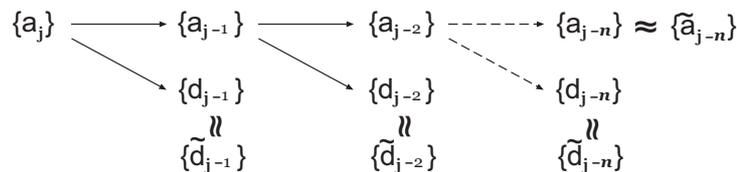


Figura 3.4: Iterazione della fase di scomposizione con approssimazione

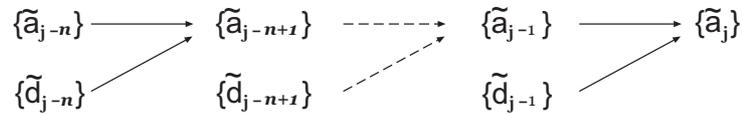


Figura 3.5: Iterazione della fase di ricostruzione con coefficienti approssimati

che chiameremo filtri duali, per la ricostruzione.

### 3.2 Ricostruzione perfetta con due coppie di filtri differenti

Analizziamo il procedimento seguendo lo schema della figura 3.6, procedimento che ricorda la codifica in sottobande con le ondi ortonormali e la ricostruzione perfetta di figura 3.1. La differenza sta nel fatto che ora non verranno poste condizioni iniziali sui filtri  $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ .

Modelli come questo per la codifica in sottobande sono usati fin dagli anni '50 in teoria de segnali. Erano note condizioni di ricostruzione per filtri che producevano risultati con buone approssimazioni. Tuttavia non si conosceva ancora quale risultato matematico garantisse il buon funzionamento di alcuni di questi filtri.

Cohen [cfr Cohen, Cohen Daubechies Feauveau], scrisse le condizioni di ricostruzione perfetta che tuttora vengono utilizzate. Presentiamo ora tale tale procedimento, nel paragrafo seguente ne mostreremo il fondamento matematico.

Indichiamo con  $s(\omega)$ , la trasformata di Fourier di un qualsiasi segnale digitale, come nella Definizione 3.1.8 e modifichiamo  $s(\omega)$  seguendo lo schema indicato in figura 3.6,

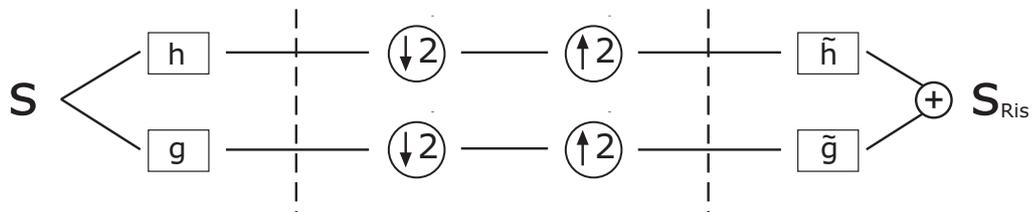


Figura 3.6: Schema di Codifica in Sottobande con filtri differenti.

mediante quattro filtri  $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ . Precisiamo che per tutto il procedimento verranno presi in considerazione filtri normalizzati di modo che valga (1.21).

- i) In primo luogo il segnale viene scomposto mediante la prima coppia di filtri  $h$  e  $g$ , che, in analogia al caso dei filtri basati su MRA di ordine, chiameremo passa alto e passa basso. Così facendo abbiamo scomposto  $s(\omega)$ , nei seguenti segnali

$$s_1(\omega) = \hat{h}(\omega)s(\omega), \quad s_2(\omega) = \hat{g}(\omega)s(\omega).$$

- ii) Dopodichè si opera una decimazione seguita da un upsampler su entrambe le bande per non alterare l'informazione. Otterremo grazie alla formula (3.6)

$$s_1^d(\omega) = \hat{h}(\omega)s(\omega) + \hat{h}(\omega + \pi)s(\omega + \pi),$$

$$s_2^d(\omega) = \hat{g}(\omega)s(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi)s(\omega + \pi).$$

- iii) Si ricostruisce il segnale mediante le maschere di una seconda coppia di filtri, che indicheremo con  $\tilde{h}, \tilde{g}$  e che chiameremo filtri duali.

Sommeremo poi i segnali sulle due bande per cercare di recuperare l'informazione iniziale. Avremo quindi:

$$s_{Ris}(\omega) = \tilde{h}(\omega)s_1^d(\omega) + \tilde{g}(\omega)s_2^d(\omega)$$

che vuol dire

$$s_{Ris}(\omega) = \tilde{h}(\omega)[\hat{h}(\omega)s(\omega) + \hat{h}(\omega + \pi)s(\omega + \pi)] + \tilde{g}(\omega)[\hat{g}(\omega)s(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi)s(\omega + \pi)]. \quad (3.8)$$

Osserviamo che per avere ricostruzione perfetta dovrà accadere

$$s(\omega) = s_{Ris}(\omega),$$

che per la (3.8) bisognerà richiedere che i filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  soddisfino le seguenti condizioni,

$$\begin{cases} \hat{h}(\omega)\hat{h}(\omega) + \hat{g}(\omega)\hat{g}(\omega) = 1 \\ \hat{h}(\omega)\hat{h}(\omega + \pi) + \hat{g}(\omega)\hat{g}(\omega + \pi) = 0 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Questa è finora l'unica condizione che abbiamo ed è anche la più generale che si possa utilizzare. In effetti se non fosse rispettata la prima condizione si avrebbe un'amplificazione del segnale  $s(\omega)$ , mentre se non fosse rispettata la seconda, il termine  $s(\omega + \pi)$  produrrebbe aliasing.

È possibile riassumere quanto visto finora nel seguente teorema [cfr Mallat Thm 7.7]

**Teorema 3.2.1** (Vetterli)

Lo schema di codifica in sottobande realizza ricostruzione perfetta di qualsiasi segnale se e solo se i filtri  $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ , soddisfano le relazioni (3.9)

Vista l'importanza di tali condizioni, diamo la seguente definizione

**Definizione 3.2.1** (Condizioni di ricostruzione perfetta per i filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ )

Diremo che l'insieme di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  realizza ricostruzione perfetta se le corrispondenti maschere soddisfano le condizioni (3.9).

Presentiamo anche la formulazione matriciale di tale condizione, formulazione che risulterà particolarmente utile nel prossimo capitolo. La (3.9) diviene

$$\begin{bmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{g}(\omega) \\ \hat{h}(\omega + \pi) & \hat{g}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tilde{h}}(\omega) \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

che equivale alla seguente relazione

$$\begin{bmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{g}(\omega) \\ \hat{h}(\omega + \pi) & \hat{g}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tilde{h}}(\omega) & \hat{\tilde{h}}(\omega + \pi) \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) & \hat{\tilde{g}}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A questo punto possiamo definire,

**Definizione 3.2.2** (Matrice di modulazione di filtri  $h$  e  $g$ )

Chiamiamo  $m_{h,g}(\omega)$  matrice di modulazione di filtri  $(h,g)$ , la matrice così definita:

$$m_{h,g}(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{g}(\omega) \\ \hat{h}(\omega + \pi) & \hat{g}(\omega + \pi) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

e analogamente si definisce la matrice  $\widetilde{m}_{h,g}(\omega)$  a partire dalla coppia di filtri  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ .

Possiamo quindi riscrivere la condizione di ricostruzione perfetta (3.9) per l'insieme di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  come

$$m_{h,g}(\omega) \widetilde{m}_{h,g}^T(\omega) = \mathbf{I}_2(\omega). \quad (3.12)$$

È abbastanza ragionevole, per soddisfare la seconda di (3.9), imporre

$$\begin{cases} \hat{\tilde{h}}(\omega) = \hat{g}(\omega + \pi) \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = \hat{h}(\omega + \pi) \end{cases}, \quad (3.13)$$

questo per mantenere la natura di polinomi trigonometrici dei filtri  $\tilde{h}$  e  $\tilde{g}$ .

Questa non è ovviamente l'unica scelta possibile, sarà proprio argomento di studio determinare quali altri filtri soddisfano tale relazione.

Resta quindi da verificare che le maschere dei filtri  $\hat{h}, \hat{g}$  verifichino

$$\hat{h}(\omega)\hat{g}(\omega + \pi) + \hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega + \pi) = 1. \quad (3.14)$$

Osserviamo che a partire da  $(h, g)$  che soddisfano la relazione (3.14), i filtri  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ , definiti come in (3.13), risultano soddisfare anch'essi la stessa relazione e quindi l'insieme  $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$  realizza ricostruzione perfetta.

Nel 1977 Esteban e Galand hanno proposto uno schema di codifica in sottobande scegliendo, modificando le (3.13) nel seguente modo

$$\begin{cases} \hat{\tilde{h}}(\omega) = \hat{g}(\omega + \pi) \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = -\hat{h}(\omega + \pi) \\ \hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega + \pi) \end{cases},$$

in tal caso la condizione che resta da verificare sul filtro  $h$  è

$$\hat{h}(\omega)^2 - \hat{h}(\omega + \pi)^2 = 1.$$

Tali filtri vengono detti *QMF*, ossia *quadrature mirror filters*, di rimando allo schema di codifica in sottobande che utilizza gli stessi filtri per la scomposizione e per la ricostruzione.

Si dimostra tuttavia che non esistono coppie di filtri FIR che soddisfano tali condizioni, quindi i *QMF* non verranno più presi in considerazione in questo lavoro.

Nel 1984 Smith e Barnwell proposero con i filtri *CQF* un'alternativa alle condizioni poste in (3.13), ossia

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\hat{h}(\omega + \pi)} \\ \hat{\tilde{h}}(\omega) = \overline{\hat{h}(\omega)} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = e^{i\omega}\hat{h}(\omega + \pi) \end{cases}. \quad (3.15)$$

Sotto queste condizioni la (3.9) diventerebbe semplicemente

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

Ritroviamo tra queste coppie di filtri i filtri specchio coniugati, ossia quelli che soddisfano le condizioni del Teorema 1.4.2. In questo caso la codifica in sottobande risulterebbe identica a quella di figura 3.1, basata su un MRA di onde ortonormali.

Ritorniamo ora alle condizioni (3.9) e cerchiamo un'altra soluzione della seconda equazione. Osserviamo immediatamente che la relazione (3.12)

$$m_{h,g}(\omega)\tilde{m}_{h,g}^T(\omega) = \mathbf{I}_2(\omega),$$

è equivalente a

$$(m_{h,g}(\omega)\tilde{m}_{h,g}^T(\omega))^T = \tilde{m}_{h,g}(\omega)m_{h,g}(\omega)^T = \mathbf{I}_2(\omega),$$

e dato che per le matrici quadrate il prodotto con l'inversa risulta commutativo, si ottiene

$$m_{h,g}^T(\omega)\tilde{m}_{h,g}(\omega) = \mathbf{I}_2(\omega) \quad (3.16)$$

che risulta essere la relazione (3.12) tra le trasposte.

Questa seconda formulazione viene molto utilizzata, soprattutto perchè ci permette di fissare  $(g, \tilde{g})$  in funzione della coppia di filtri  $(h, \tilde{h})$ . Osserviamo infatti che se ponessimo

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = \tilde{h}(\omega + \pi) \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = h(\omega + \pi) \end{cases}, \quad (3.17)$$

la seconda e la terza equazione del sistema risulterebbero soddisfatte. Inoltre la quarta equazione coinciderebbe con la prima.

Sotto tali ipotesi la condizione di ricostruzione perfetta risulta essere

$$\hat{h}(\omega)\hat{\tilde{h}}(\omega) + \hat{h}(\omega + \pi)\hat{\tilde{h}}(\omega + \pi) = 1. \quad (3.18)$$

Per potersi ricondurre al caso ortonormale si è soliti coniugare i filtri  $h, g$  che realizzano la scomposizione. In tal caso la condizione di ricostruzione perfetta diventa, in forma matriciale

$$\overline{m_{h,g}^T(\omega)}\tilde{m}_{h,g}(\omega) = \mathbf{I}_2(\omega), \quad (3.19)$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} \overline{\hat{h}(\omega)}\hat{\tilde{h}}(\omega) + \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}\hat{\tilde{h}}(\omega + \pi) = 1 \\ \overline{\hat{g}(\omega)}\hat{\tilde{h}}(\omega) + \overline{\hat{g}(\omega + \pi)}\hat{\tilde{h}}(\omega + \pi) = 0 \\ \overline{\hat{h}(\omega)}\hat{\tilde{g}}(\omega) + \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}\hat{\tilde{g}}(\omega + \pi) = 0 \\ \overline{\hat{g}(\omega)}\hat{\tilde{g}}(\omega) + \overline{\hat{g}(\omega + \pi)}\hat{\tilde{g}}(\omega + \pi) = 1 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Nel 1992 Cohen, Daubechies e Feauveau introdussero uno schema di codifica in sotto-bande che generalizza lo schema di Smith-Barnwell. In questo caso la scelta dei filtri passa alto è

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\hat{\tilde{h}}(\omega + \pi)} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\hat{h}(\omega + \pi)} \end{cases}, \quad (3.21)$$

che come si verifica immediatamente queste soddisfano le due equazioni centrali del sistema e riducono la quarta alla seconda.

La (3.18) diventa quindi

$$\overline{\widehat{h}(\omega)} \widehat{h}(\omega) + \overline{\widehat{h}(\omega + \pi)} \widehat{h}(\omega + \pi) = 1. \quad (3.22)$$

Queste sostituzioni si preferiscono alle precedenti poiché richiamano la (1.29), infatti se ponessimo  $h = \widetilde{h}$  ricadremmo nel caso ortonormale ottenendo (1.21).

Diamo la seguente definizione,

**Definizione 3.2.3** (Filtri Duali)

Siano  $h$  e  $\widetilde{h}$  due maschere di filtri che soddisfano la relazione (3.22), allora diremo che sono duali fra loro.

Osserviamo che a partire da una coppia  $(h, \widetilde{h})$  di filtri duali, anche i filtri  $(g, \widetilde{g})$  costruita con le formule (3.21) risultano essere in relazione di dualità.

Lo schema di ricostruzione perfetta diventa, in questo caso che d'ora in poi indicheremo come biortogonale, quello di figura 3.7.

In termini operativi è utile trasformare le formule (3.21) in condizioni sui filtri, avremo quindi

$$\begin{cases} g[n] = (-1)^{(1-n)} \widetilde{h}[1-n] \\ \widetilde{g}[n] = (-1)^{(1-n)} h[1-n] \end{cases}. \quad (3.23)$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo, basta disporre di un opportuna coppia di filtri duali  $(h, \widetilde{h})$  per avere ricostruzione perfetta utilizzando l'insieme di filtri  $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$  dove  $(g, \widetilde{g})$  sono costruiti grazie alle formule (3.23).

Altrimenti, se si dispone di una coppia di filtri  $(h, g)$ , che soddisfa le relazione

$$h(\omega + \pi) \overline{g(\omega)} + h(\omega) \overline{g(\omega + \pi)} = e^{i\omega}, \quad (3.24)$$

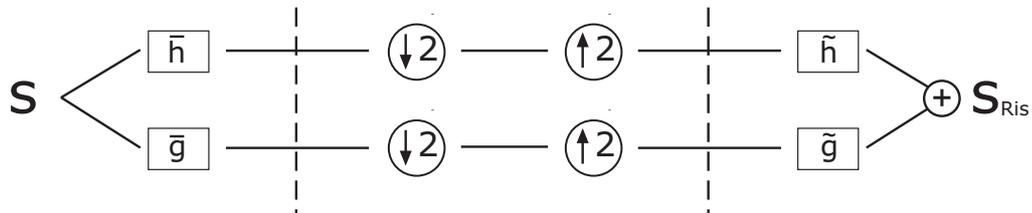


Figura 3.7: Schema di Codifica in Sottobande nel caso Biortogonale.

definendo  $\tilde{h}$  e  $\tilde{g}$  grazie alla formula (3.21) avremo ancora un insieme di filtri biortogonali  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  in grado di realizzare ricostruzione perfetta.

Possiamo quindi dare la seguente definizione

**Definizione 3.2.4** (Filtri Complementari)

Siano  $(h, g)$  due filtri FIR, diremo che tali filtri sono complementari se soddisfano la relazione (3.24).

Si pongono ora due questioni:

- i) Bisognerebbe avere una formula per il calcolo esplicito del filtro passa basso duale  $\tilde{h}$  a partire da  $h$ .
- ii) Le soluzioni che sono state trovate ai sistemi (3.9) e (3.20) non sono certo le uniche possibili. Bisognerebbe avere una caratterizzazione di tutte e sole le possibili soluzioni di tali sistemi, in modo da poter costruire diversi insiemi di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  realizza ricostruzione perfetta.

La risposta a queste domande si trova nel capitolo seguente, tuttavia prima di affrontare queste questioni è necessario dare un fondamento matematico all'algoritmo di ricostruzione perfetta.

Osserviamo che lo schema di figura 3.2, corrisponde alla scomposizione in formule (1.23) nel caso ortonormale, ossia

$$\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad P_J(f) = P_K(f) + \sum_{k \in \mathbb{Z}; j=K}^{j=J-1} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad \text{con} \quad d_{j,k} \in C.$$

Ovviamente il procedimento funziona solo per un numero finito di iterazioni poiché se in (1.23) si facesse tendere  $J \rightarrow +\infty$  e  $K \rightarrow -\infty$  non si può garantire a priori che il procedimento porti a ricostruzione perfetta.

Cohen, Daubechies e Feauveau in un loro recente lavoro [cfr Cohen, Daubechies e Feauveau] hanno trovato le condizioni per cui i filtri  $h$  e  $\tilde{h}$ , con i rispettivi filtri  $g$  e  $\tilde{g}$  definiti in (3.21), permettono la ricostruzione perfetta anche per  $J \rightarrow +\infty$  e  $K \rightarrow -\infty$ . Inoltre, sotto le stesse condizioni, è possibile associare ai filtri  $h, \tilde{h}$  delle particolari MRA di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Questo garantisce, di poter scomporre qualsiasi funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  e di ottenere comunque ricostruzione perfetta. Allo stesso modo ci permette di calcolare i coefficienti  $d_j[k]$  della formula precedente.

Così facendo Cohen, Daubechies e Feauveau hanno fornito le basi matematiche che

motivano questo procedimento anche nel caso ci si limitasse ad un numero finito di passaggi. Questo offre criteri per scegliere i filtri  $h, \tilde{h}$  per migliorare la ricostruzione. Nel prossimo paragrafo vedremo nel dettaglio questa teoria.

### 3.3 Ondine Biortogonali

Incominciamo col dare la seguente definizione.

**Definizione 3.3.1** (Base Biortogonale)

Siano  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in Z}$ , diciamo che costituiscono una coppia di basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$  se avviene

- i)  $\forall j, k, j', k' \in Z \quad \langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$  ;
- ii)  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$  ;
- iii)  $\forall f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad f = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}$  ;

Vediamo subito un semplice esempio,

**Esempio 3.3.1**

I vettori  $\{\underline{\psi}_0, \underline{\psi}_1\}, \{\tilde{\underline{\psi}}_0, \tilde{\underline{\psi}}_1\}$ , definite ponendo

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_0 &= [1, 0] & \underline{\psi}_1 &= [1, 1] \\ \tilde{\underline{\psi}}_0 &= [1, -1] & \tilde{\underline{\psi}}_1 &= [0, 1] \end{aligned}$$

risultano essere coppia di basi biortogonali in  $\mathfrak{R}^2$ , com'è immediato verificare.

Osserviamo che se  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  sono una coppia di basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$ , ciascuna di esse è una base di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Inoltre dalla definizione segue che  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  non possono essere basi ortogonali, se così fosse infatti si avrebbe

$$\forall j, k \in Z \quad \psi_{j,k} = \tilde{\psi}_{j,k},$$

dall'unicità di scrittura di un elemento rispetto ad una base.

Riprendiamo ora quanto detto nel paragrafo precedente in riferimento alla ricostruzione perfetta basata su coppie di filtri duali. Se disponiamo di quattro filtri che realizzano

ricostruzione perfetta  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ , possiamo associare una funzione a ciascuno di essi, seguendo la costruzione (1.20). Ossia, partendo dalla coppia di filtri duali  $h, \tilde{h}$  definiamo

$$\hat{\Phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} h(2^{-k}\omega); \quad (3.25)$$

$$\hat{\tilde{\Phi}}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}(2^{-k}\omega). \quad (3.26)$$

Sfruttando i filtri  $g$  e  $\tilde{g}$  definiti in (3.21), costruiamo  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$  nella maniera seguente

$$\hat{\Psi}(2\omega) = g(\omega)\hat{\phi}(2\omega); \quad (3.27)$$

$$\hat{\tilde{\Psi}}(2\omega) = \tilde{g}(\omega)\hat{\phi}(2\omega). \quad (3.28)$$

Prima di occuparci delle relazioni che intercorrono tra le funzioni  $\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi, \tilde{\Psi}$ , facciamo alcune considerazioni sulla loro esistenza.

In generale si può solo affermare che queste definizioni portano a delle distribuzioni, poiché nulla garantisce la convergenza dei prodotti infiniti che compaiono.

Osserviamo che nel caso si disponga di una coppia di filtri FIR passa basso  $(h, \tilde{h})$ , le formule (3.25), - (3.28), definiscono delle funzioni di  $L^2(T)$ , e questo grazie al Teorema 1.5.1 [cfr Soardi].

Sottolineiamo che questo risolve tutti i problemi nella pratica poiché le funzioni verranno, in qualsiasi loro impiego computazionale, valutate su un insieme finito di valori. La garanzia che i prodotti finiti convergono su ogni compatto rende quindi sensato un inevitabile troncamento. Nella pratica vengono rappresentate delle approssimazioni polinomiali delle funzioni  $\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi, \tilde{\Psi}$ , delle quali non si conosce quasi mai l'espressione. Altri problemi sorgono quando abbiamo a che fare con dei filtri IIR, in tal caso le maschere associate  $h$  e  $\tilde{h}$ , rappresentano una qualunque funzione di  $L^2(\mathfrak{R})$  periodica, quindi bisognerebbe valutare la convergenza delle formule.

In teoria dei segnali si considerano sempre filtri FIR, quindi avremo sempre la certezza di lavorare con funzioni.

Ora bisogna valutare, come costruire gli insiemi di funzioni  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e quando questi costituiscono due MRA e due basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Dal momento che soltanto una base di ondive per  $L^2(\mathfrak{R})$  risulterebbe utile, costruiremo la singola funzione  $\psi_{j,k}$  a partire da  $\Psi$  proprio come nel caso ortonormale (1.27), cioè

$$\psi_{j,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right),$$

e allo stesso modo per  $\tilde{\psi}_{j,k}, \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,k}$ .

Per determinare le condizioni sotto le quali gli insiemi  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  costituiscono una coppia di basi biortogonali, richiamiamo le seguenti proposizioni, dovute a Cohen [cfr Cohen, prop 4.5 4.6].

**Proposizione 3.3.1**

Se per le funzioni  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ , definite dalle formule (3.25) e (3.26), vale

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z} \quad \langle \Phi(x - k), \tilde{\Phi}(x - k') \rangle = \delta_{k,k'},$$

allora, per le funzioni  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$ , costruite con le (3.27) e (3.28), varrà

$$\forall j, j', k, k' \in \mathbb{Z} \quad \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{j,j'}.$$

**Proposizione 3.3.2**

Siano  $h$  e  $\tilde{h}$  una coppia di filtri FIR duali fra loro, allora le funzioni  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ , costruite come in (3.25) e in (3.26), soddisfano la relazione seguente

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z} \quad \langle \Phi(x - k), \tilde{\Phi}(x - k') \rangle = \delta_{k,k'}.$$

Nel caso di filtri IIR  $(h, \tilde{h})$  in relazione di dualità, diremo allora che  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$  sono formalmente biortogonali, intendendo che tale relazione vale tra le distribuzioni.

Assieme, queste due proposizioni garantiscono, partendo da una coppia di filtri FIR duali tra loro, di produrre una coppia di insiemi di funzioni  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  che sono biortogonali fra loro, che soddisfano cioè il primo punto della Definizione 3.3.1. Manca da dimostrare che tali insiemi di funzioni  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , sono ciascuno una base di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Il seguente teorema, di centrale importanza, risolve questo problema.

**Teorema 3.3.1**

Siano  $\phi$  e  $\tilde{\phi}$  funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$  che soddisfano  $\langle \phi_k, \tilde{\phi}_h \rangle = \delta_{h,k}$  e

$$|\hat{\Phi}(\omega)|^2 + |\hat{\tilde{\Phi}}(\omega)|^2 \leq C(1 + |\omega|)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}, \tag{3.29}$$

allora gli insiemi  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , definiti dalle le formule (3.27) e (3.28) a partire da una coppia di filtri duali  $h$  e  $\tilde{h}$ , sono due basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Osserviamo che, anche nel caso dei filtri FIR, dov'è garantito che i prodotti infiniti (3.25) e (3.26) convergono, spesso non si riesce a determinare l'espressioni di tali funzioni. Questo rende impossibile una diretta applicazione del teorema. Tuttavia, per

eseguire la codifica in sottobande, non è necessario conoscere  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ . Si può scomporre una funzione utilizzando soltanto i filtri  $h$  e  $\tilde{h}$  e ricostruirla con  $g$  e  $\tilde{g}$ .

Il problema rimane sapere se questa codifica in sottobande scompone e ricostruisce tutte le funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$ , ossia valutare se  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  sono delle basi di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Ancora una volta, una minima richiesta di regolarità alle funzioni  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$  basta a garantire l'esistenza di una coppia di basi biortogonali. Tale richiesta può essere verificata anche a partire dai filtri. Grazie alla Proposizione 1.5.3 infatti, possiamo collegare l'ordine di zero come radice dei polinomi trigonometrici  $\hat{h}(\omega)$  e di  $\hat{\tilde{h}}(\omega)$ , alla regolarità di  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ .

Osserviamo inoltre che l'esistenza di queste basi biortogonali è legata solo ad alcuni filtri che realizzano ricostruzione perfetta, ossia ai filtri *CQF* di Daubechies e Cohen.

Il vantaggio principale delle basi biortogonali è quello di utilizzare un sistema,  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  per il calcolo dei coefficienti ed un secondo sistema,  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  per la ricostruzione. Se a questo aggiungiamo una relativa libertà di scelta per funzioni madre  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$ , si apre la prospettiva di costruire basi biortogonali molto convenienti.

Ci sono differenti proprietà auspicabili per la funzione  $\Psi$  che scompone le funzioni e per la funzione  $\tilde{\Psi}$  che si occupa della ricostruzione.

L'annullarsi di diversi momenti implica una buona localizzazione della funzione, ed è quindi da tenere in considerazione per la scelta della funzione  $\Psi$ , in modo da ridurre il numero dei coefficienti non nulli.

Al contrario la funzione  $\tilde{\Psi}$ , che realizza la sintesi, è auspicabile che sia di facile implementazione, in modo di agevolare la riscrittura. Un buon grado di regolarità, inoltre, evita che si amplifichino gli errori nella fase di ricostruzione. Tutti questi vantaggi si possono riscontrare studiando solamente i filtri di queste funzioni.

Studiamo ora le due MRA che possiamo costruire seguendo la Definizione 1.4.2, partendo da una coppia di basi biortogonali  $\{\phi_{j,k}\}_{j,k}$  e  $\{\tilde{\phi}_{j,k}\}_{j,k}$ .

Definiremo  $V_0$  come lo spazio generato da  $\phi$  e da tutte le sue traslate intere, e  $\tilde{V}_0$  da tutte le traslate intere di  $\tilde{\phi}$ , il generico spazio  $V_j$  o  $\tilde{V}_j$  verrà costruito a partire dalla funzione  $\phi(2^{-j}t)$  o da  $\tilde{\phi}(2^{-j}t)$ .

Gli spazi  $W_j$  e  $\tilde{W}_j$  non potranno più essere definiti come  $W_j = V_j^\perp$  in  $V_{j+1}$ , poiché si sono perse tutte le richieste di ortogonalità tra gli spazi della MRA. Si definirà allora  $W_j$  nel modo seguente

$$W_j = \prec \psi_{j,k} \succ_{k \in \mathbb{Z}},$$

e analogamente per  $\tilde{W}_j$ .

Le relazioni di ortogonalità all'interno d'entrambe le MRA risultano quindi diverse da

quelle di una MRA generata da una funzione di scala ortonormale. In questa coppia di MRA l'ortogonalità non sarà più verificata tra gli spazi  $W_j$  della stessa, altrimenti si avrebbe che la base  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$  è una base ortogonale. Ci sarà invece ortogonalità tra i seguenti spazi

$$\begin{aligned} \forall j \in Z \quad V_j \perp \widetilde{W}_j, \\ \forall j \in Z \quad W_j \perp \widetilde{V}_j, \end{aligned}$$

dall'inscatolamento degli spazi  $V_j$  e  $\widetilde{V}_j$  e dal fatto che l'essere ortogonali tra spazi distinti è una relazione transitiva, segue

$$\begin{aligned} \forall j \in Z \quad l \leq j \quad W_j \perp \widetilde{V}_l, \\ W_j \perp \widetilde{W}_l. \end{aligned}$$

I vantaggi di sfruttare le basi biortogonali sono evidenti, il problema altrettanto evidente è, come per i frame, la determinazione di una base duale che si presti per la ricostruzione. Possediamo infatti solo una condizione necessaria tra i filtri perchè siano duali, condizione che comunque lascia molti gradi di libertà per la scelta del duale. In effetti, fissato un filtro  $h$ , esistono diversi filtri  $\widetilde{h}$  che soddisfano la relazione (3.22), e questa relazione non rappresenta una formula utile per un calcolo esplicito di un filtro  $\widetilde{h}$ .

Rinviamo questo problema al prossimo capitolo. Presentiamo ora un esempio di codifica in sottobande ed alcune considerazioni sulle basi biortogonali per  $L^2(\mathfrak{R})$ .

### 3.4 Esempi

Incominciamo col mostrare cosa significhi eseguire la codifica in sottobande a partire dal sistema di Haar. I filtri  $h, g$  di Haar, ricavati dalla MRA di Haar nel paragrafo di esempi del primo capitolo, sono definiti nella maniera seguente,

$$\begin{aligned} h_0 = 1/\sqrt{2}, \quad h_1 = 1/\sqrt{2}, \quad 0 \text{ altrove}, \\ g_0 = -1/\sqrt{2}, \quad g_1 = 1/\sqrt{2}, \quad 0 \text{ altrove}. \end{aligned}$$

Il filtro  $g$  può essere ricavato dal filtro  $h$  mediante la formula (1.30).

Partiamo da una stringa di coefficienti che chiameremo  $\{a_j[p]\}_{p=0,\dots,N}$  e produciamo i coefficienti  $\{a_{j-1}[p]\}_{p=0,\dots,N/2}$  e  $\{d_{j-1}[p]\}_{p=0,\dots,N/2}$  secondo lo schema di figura, 3.2. Iniziamo la scomposizione e applichiamo la (3.3),

$$a_{j-1}[p] = h_0 a_j[2p] + h_1 a_j[2p+1] = \frac{a_j[2p] + a_j[2p+1]}{\sqrt{2}}.$$

Questa è l'informazione che verrà trasmessa al posto dei coefficienti  $\{a_j[p]\}_{p=0,\dots,N}$ , mentre l'informazione complementare risulta dalla formula (3.4),

$$d_{j-1}[p] = g_0 d_j[2p] + g_1 a_j[2p+1] = \frac{a_j[2p+1] - a_j[2p]}{\sqrt{2}}.$$

Notiamo immediatamente che nella successione  $\{a_{j-1}[p]\}_{p=0,\dots,N/2}$  il singolo termine  $a_{j-1}[p]$  è dato dalla somma di  $a_j[2p]$  e  $a_j[2p+1]$ , due valori consecutivi della successione  $\{a_j[p]\}_{p=0,\dots,N}$ . L'informazione complementare contenuta nel singolo termine  $d_j[p]$  consiste invece nella differenza tra  $a_{j-1}[2p]$  e  $a_{j-1}[2p+1]$ . Risulta evidente che da  $a_{j-1}[p]$  e da  $d_j[p]$  si possano ricostruire  $a_{j-1}[2p]$  e  $a_{j-1}[2p+1]$ . L'algoritmo di ricostruzione perfetta non è quindi nulla di particolare nel caso dei filtri di Haar: al posto di due valori vengono trasmesse la loro somma e la loro differenza.

Questa scomposizione ovviamente non comporta alcun vantaggio in termini di compressione del segnale, il riscontro sta nel fatto che vengono prodotti due segnali digitali di lunghezza  $N/2$ . Solo nel caso il segnale fosse costante o pressochè costante nei due valori consecutivi  $a_j[2p]$  e  $a_j[2p+1]$ , allora si avrebbe un effettivo vantaggio,  $d_j[p]$  sarebbe nullo o trascurabile e l'informazione contenuta in  $a_{j-1}[p]$  basterebbe per ricostruire o eventualmente approssimare  $a_j[2p]$  e  $a_j[2p+1]$ .

Per esempi di ondine biortogonali rimandiamo al prossimo capitolo, dove presenteremo una tecnica che ci permette di ricavare qualsiasi base biortogonale di ondine. Per il momento ci limitiamo a dire che tra i vantaggi di utilizzare un sistema biortogonale vi è il non dover ortonormalizzare il sistema di generatori. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di formula (1.4.1) stravolgeva la natura delle funzioni della base, ad esempio da delle spline polinomiali si ottenevano altre funzioni che non risultavano più spline. Questo non avviene più nel caso biortogonale, il duale di una spline polinomiale risulta ancora una spline polinomiale e questa è una buona proprietà che permette di ottenere diverse coppie di basi biortogonali.

Rimandiamo al libro di Daubechies e all'articolo di Cohen Daubechies e Feauveau per maggiori dettagli ed esempi, [Daubechies, Cohen Daubechies Feauveau].

Nel prossimo capitolo vedremo anche una formula per determinare un duale di un filtro assegnato e presenteremo anche un teorema che garantisce che le funzioni  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$  costruite a partire da filtri qualunque siano effettivamente funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$ .

# Capitolo 4

## Lifting

### 4.1 Approfondiamo il caso biortogonale

In questo capitolo approfondiremo la teoria delle basi biortogonali, in particolare ci occuperemo del caso di funzioni di scala ed ondine a supporto compatto che, come abbiamo già detto, corrisponde al caso dei filtri FIR.

Per questioni di praticità e di maggior leggibilità indicheremo le maschere dei filtri  $\{h_n\}_n$  e  $\{g_n\}_n$  con  $h$  e  $g$ , tralasciando il cappuccio.

A partire da una determinata coppia di filtri duali  $(h, \tilde{h})$ , possono essere definiti diversi filtri  $(g, \tilde{g})$  che realizzano ricostruzione perfetta, ai quali è possibile associare altre basi biortogonali di ondine. Cioè nell'ambito del caso biortogonale la scelta (3.21) non è l'unica possibile. Si possono associare diverse funzioni  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$ , costruite mediante le (3.27), (3.28), agli stessi filtri  $(h, \tilde{h})$ .

Inizieremo dall'enunciare delle condizioni sotto le quali avranno senso le espressioni (3.25), - (3.28) a partire da una coppia di filtri duali. Il passo successivo sarà mostrare il Lifting, una tecnica che permette di modificare opportunamente le MRA. Infine mostreremo che mediante il Lifting è possibile ricavare qualsiasi base biortogonale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Introduciamo un operatore che chiameremo  $P_h$ , associato al filtro  $h$ , che agisce su funzioni  $2\pi$ -periodiche nella maniera seguente

#### **Definizione 4.1.1**

*Sia  $h \in L^2(T)$ , definiamo*

$$\forall a \in L^2(T) \quad (P_h a)(\omega) = |h(\omega/2)|^2 a(\omega/2) + |h(\omega/2 + \pi)|^2 a(\omega/2 + \pi).$$

Analogamente si definisce l'operatore  $\widetilde{P}_h$  associato al filtro  $\widetilde{h}$  duale di  $h$ .

Tale operatore ci permette di enunciare un teorema che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza dei prodotti (3.25), (3.26).

**Teorema 4.1.1** (Cohen, Daubechies, Feauveau)

*Dati due filtri  $h$  e  $\widetilde{h}$ , che soddisfano la relazione (3.22), le condizioni seguenti sono equivalenti*

- i)  $\Phi$  e  $\widehat{\Phi}$ , definite dalle formule (3.25), (3.26) sono funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$  e vale che  $\langle \Phi, \Phi(\cdot - l) \rangle = \delta_l$ ;
- ii) i filtri FIR  $h$  e  $\widetilde{h}$  duali fra loro, soddisfano  $h(0) = \widetilde{h}(0) = 1$ , inoltre vale che 1 è un autovalore di molteplicità 1 di  $P_h$  e di  $\widetilde{P}_h$  e i relativi autovettori sono polinomi strettamente positivi.

La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Cohen, Daubechies, Feauveau].

Questo teorema ribadisce che la relazione di dualità tra i filtri non è sufficiente a garantire l'esistenza di MRA associate.

Osserviamo che qualora sia verificata una delle due ipotesi, si ha che anche le formule (3.27) e (3.28) definiscono due funzioni  $\Psi$  e  $\widetilde{\Psi}$  di  $L^2(\mathfrak{R})$ . Per garantire che queste due funzioni generano effettivamente due basi biortogonali di  $L^2(\mathfrak{R})$  si potrà verificare la richiesta (3.29), questa però è una condizione sufficiente e non necessaria, potremmo quindi disporre di basi biortogonali che non soddisfano questa condizione.

Come abbiamo accennato all'inizio esistono diverse possibili costruzioni di basi biortogonali di ondine, il seguente teorema generalizza la scelta di Cohen (3.21) sui filtri  $g, \widetilde{g}$  [cfr Sweldens 94, Chui].

**Teorema 4.1.2** (Chui)

*Siano  $h$  e  $\widetilde{h}$  una coppia di filtri duali fra loro,  $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$  è un insieme di filtri biortogonali che realizza ricostruzione perfetta se e solo se  $g$  e  $\widetilde{g}$ , sono della forma*

$$g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\widetilde{h}(\omega + \pi)} \overline{k(2\omega)}, \quad e \quad \widetilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)} k^{-1}(2\omega), \quad (4.1)$$

dove  $k$  è una funzione di  $L^2(T)$  con coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier in  $\ell^1$ , tale che la sua inversa  $k^{-1}$  ha coefficienti in  $\ell^1$ .

DIMOSTRAZIONE [cfr Chui]

La dimostrazione di un'implicazione risulta banale, in quanto consiste nel verificare che i filtri della forma (4.1), insieme ai filtri duali  $h$  e  $\tilde{h}$ , soddisfano le condizioni di ricostruzione perfetta nel caso biortogonale, e quindi che le rispettive matrici di modulazione soddisfano (3.19).

Viceversa, partiamo dalla formula (3.19) che abbiamo dimostrato essere equivalente al sistema (3.20)

$$\begin{cases} \overline{\tilde{h}(\omega)} \widehat{\tilde{h}(\omega)} + \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)} \widehat{\tilde{h}(\omega + \pi)} = 1 \\ \overline{\tilde{g}(\omega)} \widehat{\tilde{h}(\omega)} + \overline{\tilde{g}(\omega + \pi)} \widehat{\tilde{h}(\omega + \pi)} = 0 \\ \overline{\tilde{h}(\omega)} \widehat{\tilde{g}(\omega)} + \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)} \widehat{\tilde{g}(\omega + \pi)} = 0 \\ \overline{\tilde{g}(\omega)} \widehat{\tilde{g}(\omega)} + \overline{\tilde{g}(\omega + \pi)} \widehat{\tilde{g}(\omega + \pi)} = 1 \end{cases}.$$

Risolviamo allora questo sistema rispetto alle incognite  $\{\tilde{h}(\omega), \tilde{g}(\omega)\}$  che corrisponde a risolvere il sistema (3.10), a meno di un coniugio, ossia

$$\overline{m_{h,g}(\omega)} \begin{bmatrix} \tilde{h}(\omega) \\ \tilde{g}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tale sistema ammette soluzioni se vale  $\det(\overline{m_{h,g}})(\omega) \neq 0$ . Se i filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  realizzano ricostruzione perfetta, deve essere verificata la condizione (3.19) e quindi la matrice  $\overline{m_{h,g}(\omega)}$  deve essere invertibile. Questo implica che  $\det(\overline{m_{h,g}}(\omega)) \in L^2(T)$  e la sua reciproca,  $(\det(\overline{m_{h,g}}(\omega)))^{-1} \in L^2(T)$ .

Possiamo quindi calcolare le soluzioni del sistema grazie alla regola di Cramer.

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{g(\omega)} \\ 0 & \overline{g(\omega + \pi)} \end{vmatrix}}{\det(\overline{m_{h,g}})(\omega)} \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} \overline{h(\omega)} & 1 \\ \overline{h(\omega + \pi)} & 0 \end{vmatrix}}{\det(\overline{m_{h,g}})(\omega)},$$

e quindi

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\overline{g(\omega + \pi)}}{\det(\overline{m_{h,g}})(\omega)} \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = -\frac{\overline{h(\omega + \pi)}}{\det(\overline{m_{h,g}})(\omega)}.$$

Osserviamo inoltre che la funzione  $e^{-i\omega} \det(m_{h,g})(\omega)$ , ha periodo  $\pi$ , infatti

$$\det(m_{h,g})(\omega + \pi) = (h(\omega + \pi)g(\omega) - g(\omega + \pi)h(\omega)) = -\det(m_{h,g})(\omega),$$

quindi

$$e^{-i(\omega+\pi)} \det(m_{h,g})(\omega + \pi) = e^{-i\omega} \det(m_{h,g})(\omega),$$

ha senso allora definire

$$k(2\omega) = e^{-i\omega} \det(\overline{m_{h,g}})(\omega + \pi).$$

Per quanto abbiamo detto  $k \in L^2(T)$ , inoltre  $\{k_n\}_n \in \ell^1$ , dove per  $\{k_n\}_n$  si intende la successione dei coefficienti di Fourier di  $k(\omega)$ . Se indichiamo con  $k^{-1}$  la reciproca di tale funzione avremo che, se vale  $k(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$ , allora  $\{k_n^{-1}\}_n \in \ell^1$ , dove con  $\{k_n^{-1}\}_n$  indichiamo i coefficienti di Fourier di  $k^{-1}$ , per maggiori dettagli [cfr Chui]. Riprendiamo ora le soluzioni del sistema ottenute in precedenza

$$\overline{g(\omega + \pi)} = (\det(\overline{m_{h,g}})(\omega))\tilde{h}(\omega) \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = -\frac{\overline{h(\omega + \pi)}}{\det(\overline{m_{h,g}})(\omega)},$$

cioè

$$g(\omega) = \overline{\tilde{h}(\omega + \pi) \det(\overline{m_{h,g}})(\omega + \pi)} \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = -\frac{\overline{h(\omega + \pi)}}{-\det(\overline{m_{h,g}})(\omega + \pi)},$$

infine, sostituendo  $k(2\omega)$ , si ottiene

$$g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\tilde{h}(\omega + \pi) k(2\omega)} \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi) k^{-1}(2\omega)},$$

che equivalgono a (4.1).

Osserviamo che il caso interessante è quello in cui  $\{k_n\}_n$  è una successione finita di coefficienti, in modo da ottenere che  $g$  è ancora un filtro FIR. In tal caso però  $k(\omega)$  risulta essere un polinomio trigonometrico, la sua reciproca quindi potrebbe non restare tale, questo produrrebbe un filtro  $\tilde{g}$  IIR.

L'unica situazione in cui la coppia  $(g, \tilde{g})$  è composta da filtri FIR è quando  $k(\omega)$  è un monomio.

Con questo teorema abbiamo completamente caratterizzato i filtri  $(g, \tilde{g})$ , associati ad una coppia di filtri in relazione di dualità  $(h, \tilde{h})$ , che rendono l'insieme di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  in grado di realizzare ricostruzione perfetta. Queste condizioni non bastano a distinguere se un filtro è passa alto o passa basso ma solamente a garantire ricostruzione perfetta. Quindi i filtri  $h, g$  possono avere ruoli invertiti nella scomposizione in sottobande.

Quando si costruiscono le due MRA associate i ruoli del filtro  $h$  e del filtro  $g$  non sono più interscambiabili, in quanto il filtro passa basso, che soddisfa quindi la Definizione 1.4.8, genera una funzione di scala, mentre il passa alto genera una funzione che a sua volta produce una base di ondine.

Nel seguito si porrà sempre che  $(h, \tilde{h})$  sono entrambi filtri passa basso, e che  $(g, \tilde{g})$  sono passa alto.

Osserviamo che se ci ponessimo nel caso banale,  $k(\omega) = 1 \forall \omega$ , otterremmo le formule

(3.21). Il Teorema di Chui è quindi a tutti gli effetti una generalizzazione dei filtri passa alto duali e offre quindi una parziale risposta alla seconda questione posta alla fine di paragrafo 3.2.

Collegando questi primi risultati abbiamo un'idea di come trasformare una base di ondine e la sua duale mantenendo la stessa coppia di funzioni di scala.

Nel caso non si utilizzassero filtri FIR e successioni finite di coefficienti  $\{k_n\}_n$ , dovremo sempre valutare se i cambiamenti effettuati producono funzioni e non delle espressioni che soltanto formalmente risultano biortogonali (e questo lo si può verificare grazie al Teorema di Cohen).

Questi risultati concorrono nella dimostrazione dello schema di Lifting, uno strumento più preciso per la determinazione di basi biortogonali.

## 4.2 Lo schema di Lifting

Presentiamo lo schema di Lifting, procedimento che permette di ottenere, a partire da  $\{\Phi, \widetilde{\Phi}^0, \Psi^0, \widetilde{\Psi}^0\}$ , sistema composto da una coppia di funzioni di scala biortogonali e di ondine biortogonali, un secondo sistema  $\{\Phi, \widetilde{\Phi}, \Psi, \widetilde{\Psi}\}$  che ancora preserva le relazioni di biortogonalità.

Facciamo presente che, per trovare un nuovo modo per realizzare codifiche di un segnale rispetto ad ondine biortogonali, occorre considerare sia i filtri passa basso che i filtri passa alto, in quanto bisogna calcolare i coefficienti sia rispetto alla funzione di scala che rispetto alla funzione ondina. Per questo considereremo sempre insiemi di funzioni del tipo  $\{\Phi, \widetilde{\Phi}, \Psi, \widetilde{\Psi}\}$ , o analogamente insiemi di filtri  $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$ .

Incominciamo ad introdurre il lemma seguente, [cfr Sweldens95]

**Lemma 4.2.1** (Herely-Vetterli)

*Fissato  $h$ , il filtro FIR di una funzione di scala a supporto compatto, consideriamo  $\widetilde{h}$  ed  $\widetilde{h}^0$ , filtri che soddisfano entrambi la relazione (3.22) e le ipotesi del Teorema 4.1.1. Allora tra questi vale la seguente relazione*

$$\widetilde{h}(\omega) = \widetilde{h}^0(\omega) + e^{-i\omega} \overline{\widetilde{h}(\omega + \pi)} \overline{s(2\omega)}, \quad (4.2)$$

dove  $s(\omega)$  è un polinomio trigonometrico.

Viceversa se  $h$  e  $h^0$  sono legati dalla relazione (4.2) e uno di essi è in relazione di dualità con  $h$ , allora necessariamente anche l'altro sarà un duale di  $h$ .

DIMOSTRAZIONE [Sweldens95, Daubechies pg 133]

La dimostrazione di un'implicazione consiste nella semplice verifica che  $\tilde{h}$  definito in (4.2) risulta essere un filtro che con  $h$  verifica la relazione di dualità (3.22).

Per dimostrare che tutti i filtri passa alto associati ad  $h$  sono del tipo (4.2), si segue l'impostazione della dimostrazione di Daubechies del teorema sulla base di ondine associata ad una MRA ortonormale.

Cominciamo con l'osservare che i filtri  $\tilde{h}$  e  $\tilde{h}^0$  per risultare duali ad  $h$  devono soddisfare le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \overline{h(\omega)}\tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega + \pi)}\tilde{h}(\omega + \pi) = 1 \\ \overline{h(\omega)}\tilde{h}^0(\omega) + \overline{h(\omega + \pi)}\tilde{h}^0(\omega + \pi) = 1 \end{cases} .$$

e quindi varrà

$$\overline{h(\omega)}[\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}^0(\omega)] + \overline{h(\omega + \pi)}[\tilde{h}(\omega + \pi) - \tilde{h}^0(\omega + \pi)] = 0 .$$

Poichè per il filtro  $h$  vale (1.21),  $h(\omega)$  e  $h(\omega + \pi)$  non si possono annullare contemporaneamente. Da questo segue che le funzioni  $[\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}^0(\omega)]$  e  $[\tilde{h}(\omega + \pi) - \tilde{h}^0(\omega + \pi)]$  sono linearmente dipendenti, cioè

$$\overline{h(\omega)} = \lambda(\omega)[\tilde{h}(\omega + \pi) - \tilde{h}^0(\omega + \pi)] ,$$

dove la funzione  $\lambda(\omega)$  risulta essere una funzione  $2\pi$ -periodica di  $L^2(\mathfrak{R})$  che, com'è immediato verificare, soddisfa la relazione

$$\forall \omega \quad \lambda(\omega) + \lambda(\omega + \pi) = 0 .$$

Questo è equivalente a chiedere che sia

$$\lambda(\omega) = \nu(2\omega)e^{i\omega} ,$$

dove  $\nu$  è, a priori, una qualsiasi funzione di  $L^2(T)$ .

Poichè il filtro  $h$  è FIR per ipotesi, anche i filtri  $\tilde{h}$  e  $\tilde{h}^0$  sono filtri FIR, e quindi la funzione  $\nu(\omega)$  dovrà necessariamente essere un polinomio trigonometrico che indicheremo con  $t(\omega)$ .

$$\overline{h(\omega)} = t(2\omega)e^{i\omega}[\tilde{h}(\omega + \pi) - \tilde{h}^0(\omega + \pi)] ,$$

da qui si ricava

$$e^{-i\omega} \frac{\overline{t(2\omega)}}{|t(2\omega)|^2} \overline{h(\omega)} = \tilde{h}(\omega + \pi) - \tilde{h}^0(\omega + \pi) ,$$

e, valutando l'espressione in  $\omega + \pi$ , si ricava

$$\tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega) + e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)} \frac{\overline{t(2\omega)}}{|t(2\omega)|^2}$$

che, a meno di definire  $s(2\omega) = \frac{\overline{t(2\omega)}}{|t(2\omega)|^2}$  corrisponde alla formula (4.2).

Con questo lemma abbiamo una caratterizzazione di tutti i filtri duali ad un certo filtro assegnato.

Il seguente corollario estende questo risultato anche ai filtri passa alto, o meglio ai filtri passa alto associati ad un determinato sistema. [cfr Sweldens95]

### Corollario 4.2.1

*Sia  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$  un insieme di filtri che soddisfano le relazioni (3.21) e (3.22) e quindi che realizzano ricostruzione perfetta, allora è possibile ottenere un nuovo insieme di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  che soddisfa le stesse relazioni se si pone*

$$\tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega) \overline{s(2\omega)}, \quad (4.3)$$

$$g(\omega) = g^0(\omega) - h(\omega) s(2\omega), \quad (4.4)$$

dove  $s(\omega)$  è un qualunque polinomio trigonometrico.

#### DIMOSTRAZIONE

Si richiede che il sistema  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  sia un sistema biortogonale di filtri, e che realizzi quindi ricostruzione perfetta. Dovremmo allora far riferimento al Teorema di Chui per una descrizione completa di tutte le coppie  $(g^0, \tilde{g})$  che è possibile associare ad  $(h, \tilde{h}^0)$  filtri duali. Tuttavia, per questa dimostrazione basta seguire le formule (3.21), che corrispondono al caso  $k(\omega) = 1$ .

Avremo quindi

$$g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)}, \quad \tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)}.$$

Eseguiamo il passaggio dal filtro passa basso  $\tilde{h}^0$  al  $\tilde{h}$  grazie alla lemma di Herely-Vetterli e otteniamo immediatamente la formula (4.3).

Per quel che riguarda la (4.4) applichiamo la formula  $g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)}$  al filtro (4.3). Otterremo quindi

$$g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{[\tilde{h}^0(\omega + \pi) + \tilde{g}(\omega + \pi) s(2\omega)]},$$

ricavando  $h(\omega)$  da  $\tilde{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{h(\omega + \pi)}$ , si ottiene

$$h(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)} \overline{\tilde{g}(\omega + \pi)},$$

sostituendo e ricordando che  $g(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)}$ , otteniamo

$$g(\omega) = g^0(\omega) - h(\omega)s(2\omega),$$

che corrisponde alla formula (4.4).

Riportiamo anche le seguenti formule prese da [Mallat 7.4.4] che esprimono in termini di filtro le formule (4.3), (4.4)

$$\tilde{h}[n] = \tilde{h}^0[n] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}[n - 2k]s[-k], \quad (4.5)$$

$$g[n] = g^0[n] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - 2k]s[k]. \quad (4.6)$$

Osserviamo che vale anche il seguente corollario.

### Corollario 4.2.2

*Siano  $(h, g^0)$  una coppia di filtri complementari, allora ogni filtro  $g$  complementare ad  $h$  è della forma*

$$g(\omega) = g^0(\omega) + h(\omega)s(2\omega),$$

*dove  $s(\omega)$  è un polinomio trigonometrico.*

#### DIMOSTRAZIONE

Richiamiamo la definizione di filtri complementari data in (3.24),  $(h, g^0)$  sono complementari se

$$h(\omega) \overline{g^0(\omega + \pi)} + h(\omega + \pi) \overline{g^0(\omega)} = e^{i\omega},$$

e lo stesso deve valere per  $(h, g)$ . Seguendo la dimostrazione del Lemma 4.2.1 si ottiene

$$h(\omega)[g^0(\omega + \pi) - g(\omega + \pi)] - h(\omega + \pi)[g^0(\omega) - g(\omega)] = 0,$$

e quindi le funzioni  $[g^0(\omega + \pi) - g(\omega + \pi)]$  e  $[g^0(\omega) - g(\omega)]$  sono linearmente dipendenti. Per ragionamenti analoghi a quelli utilizzati nella dimostrazione del Lemma 4.2.1 si può concludere che necessariamente

$$h(\omega) = [g^0(\omega) - g(\omega)]s(2\omega),$$

dove  $s(\omega)$  è un polinomio trigonometrico. Questo chiude la dimostrazione.

Supponiamo di disporre da un determinato insieme di filtri biortogonali  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$  e di modificare questi filtri, secondo la modalità indicata dal Corollario 4.2.1, per ottenere  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ .

Introduciamo così lo schema di Lifting, osservando come questi cambiamenti si ripercuotono sulle funzioni  $\Phi, \tilde{\Phi}^0, \Psi^0, \tilde{\Psi}^0$ .

La funzione di scala  $\Phi$  non risente di alcun cambiamento poiché il filtro passa basso resta lo stesso nel nuovo insieme di filtri. Cambieranno invece la funzione di scala duale  $\tilde{\Phi}^0$ , l'ondina  $\Psi^0$  e l'ondina duale  $\tilde{\Psi}^0$ .

Costruiamo l'ondina mediante il filtro  $g$  al posto di  $g^0$ . Avremo che

$$\widehat{\Psi}(\omega) = g(\omega/2)\widehat{\Phi}(\omega/2);$$

Sostituendo l'espressione (4.4) e ricordando la raffinatezza della funzione di scala  $\Psi$  seguirà:

$$\widehat{\Psi}(\omega) = g^0(\omega/2)\widehat{\Phi}(\omega/2) - s(\omega)\widehat{\Phi}(\omega). \quad (4.7)$$

Dal momento che stiamo lavorando con filtri FIR risulta vantaggioso scrivere questa relazione come somma finita su un insieme di indici  $K$

$$\Psi(t) = 2 \sum_{k \in K} g_k^0 \Phi(2t - k) - \sum_{k \in K} s_k \Phi(t - k),$$

dove  $\{s_k\}_{k \in K}$  è la successione dei coefficienti del polinomio trigonometrico  $s(\omega)$ .

Vediamo come agisce il passaggio dal filtro  $\tilde{h}^0$  al filtro  $\tilde{h}$  sulla funzione di scala duale. La nuova funzione  $\tilde{\Phi}$  si potrà scrivere:

$$\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega) = \tilde{h}(\omega/2)\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega/2);$$

esprimiamo il filtro  $\tilde{h}$  in funzione di  $\tilde{h}^0$  e otteniamo

$$\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega/2)\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega/2) + \overline{s(\omega)} g(\omega/2)\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega/2);$$

come conseguenza della definizione di filtro passa alto si ha

$$\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega/2)\widehat{\tilde{\Phi}}(\omega/2) + \overline{s(\omega)} \widehat{\Psi}(\omega).$$

Questa relazione si può anche esprimere nella forma

$$\tilde{\Phi}(t) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{h}_k^0 \tilde{\Phi}(2t - k) - \sum_{k \in K} s_k \tilde{\Psi}(t - k).$$

Osserviamo in anticipo che modificando la funzione ondina  $\Psi$  e la funzione di scala duale  $\tilde{\Phi}$ , si è automaticamente modificata anche la funzione ondina duale  $\tilde{\Psi}$ . Questa infatti si può esprimere

$$\tilde{\Psi}(t) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{g}_k \tilde{\Phi}(2t - k),$$

che risulta quindi diversa dalla precedente ondina duale, nonostante i coefficienti della serie rimangano invariati in quanto il Corollario 4.2.1 non altera il filtro  $\tilde{g}$ .

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema dovuto a Sweldens [cfr Sweldens95],

**Teorema 4.2.1** (Schema di Lifting, Sweldens)

*Sia  $\{\Phi, \tilde{\Phi}^0, \Psi^0, \tilde{\Psi}^0\}$  un insieme di funzioni di scala ed ondine biortogonali fra loro. Un nuovo insieme  $\{\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi, \tilde{\Psi}\}$  che risulta essere formalmente biortogonale può essere costruito a partire dal primo seguendo lo schema seguente:*

$$\Psi(t) = 2 \sum_{k \in K} g_k^0 \Phi(2t - k) - \sum_{k \in K} s_k \Phi(t - k), \quad (4.8)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{h}_k^0 \tilde{\Phi}(2t - k) - \sum_{k \in K} s_k \tilde{\Psi}(t - k). \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Psi}(t) = 2 \sum_{k \in K} \tilde{g}_k \tilde{\Phi}(2t - k), \quad (4.10)$$

*Dove i coefficienti  $s_k$  sono un numero finito e possono essere scelti liberamente.*

Osserviamo che in generale, affinché tali espressioni diano effettivamente luogo a delle funzioni, bisogna che il filtro duale  $\tilde{h}$  verifichi le ipotesi del Teorema 4.1.1.

Nel caso di filtri FIR, dopo un passaggio di Lifting, le espressioni (4.8)-(4.10) corrispondono a delle funzioni. Com'è facile vedere i nuovi filtri, definiti dal Corollario 4.2.1, soddisfano le ipotesi del Teorema 1.5.1.

Il passo successivo è quello di valutare se il sistema formalmente biortogonale è una base di  $L^2(\mathfrak{R})$  e non una semplice collezione di funzioni. Per far questo si può, ad esempio, valutare se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.3.1. Ricordiamo che queste ipotesi possono essere verificate, grazie alla Proposizione 1.5.3, anche a partire dai filtri  $h$  e  $\tilde{h}$ , quindi non è necessario conoscere l'espressioni analitiche di  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ .

In sostanza affinché le funzioni  $\Psi$  e  $\tilde{\Psi}$  diano luogo con le loro traslate a due basi ortonormali di  $L^2(\mathfrak{R})$  occorre che per le rispettive funzioni di scala valga  $\Phi, \tilde{\Phi} \in L^{2+\varepsilon}(\mathfrak{R})$ ,  $\varepsilon > 0$ , questo lo supporremo sempre vero per filtri FIR.

È bene notare fin da subito la sostanziale differenza che c'è tra le formula (4.8) e le (4.9), (4.10). La formula (4.8) permette di ricavare la funzione ondina poiché tutte

le quantità a secondo membro sono note. Per contro, le formule (4.9) e (4.10) sono delle condizioni che le funzione di scala e di ondina duale devono verificare perchè si costruisca un sistema formalmente biortogonale. In effetti le due formule si richiamano vicendevolmente, e quindi non risultano essere costruttive.

Cambiando prospettiva questa differenza si evidenzia ancora di più: la (4.8) ci offre un modo per modificare a piacere la funzione ondina iniziale. I coefficienti  $s_k$  possono essere definiti in modo da aumentare alcune proprietà auspicabili per un'ondina, come ad esempio l'annullarsi di più momenti. Un modo molto diffuso di procedere è quello di partire da un sistema biortogonale molto semplice e di utilizzare le formula (4.8) per ottenere un secondo sistema costruito su misura. Per quel che riguarda le altre due funzioni disponiamo solamente di una condizione necessaria che dovrà essere verificata dal sistema biortogonale.

Lo schema di Lifting sembra quindi di difficile applicazione, poiché non offre formule utili per scrivere le funzioni  $\tilde{\Phi}$  e  $\tilde{\Psi}$ . Dal punto di vista dei filtri invece un passaggio di Lifting viene rappresentato dal Corollario 4.2.1, che offre una formula costruttiva per il nuovo sistema. Vedremo nel paragrafo seguente come utilizzare i filtri modificati mediante lo schema di Lifting.

Infine osserviamo che lo schema di Lifting può essere utilizzato a partire da basi di ondine di  $L^2(\mathfrak{R})$  ortonormali (basta porre  $\Psi^0 = \tilde{\Psi}^0$ ) per ottenere basi biortogonali (seguirà  $\Psi \neq \tilde{\Psi}$ ).

Applichiamo ora un passaggio di Lifting sulle ondine presentate nel capitolo 1 ed alcune applicazioni dello schema di Lifting alla codifica in sottobande del capitolo 3.

### 4.3 Esempi ed Applicazioni

L'esempio più semplice [cfr Sweldens] consiste nell'operare un passaggio di lifting al sistema di Haar. Invece di assegnare valori arbitrari ai coefficienti  $s_k$ , cercheremo di finalizzare la scelta di questi per aumentare il numero di momenti nulli della funzione ondina  $\Psi^0 = \tilde{\Psi}^0$ .

Inizialmente disponiamo del seguente insieme filtri  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ , con

$$\tilde{h}^0(\omega) = h(\omega) = 1/2 + 1/2e^{-i\omega}, \quad e \quad \tilde{g}(\omega) = g^0(\omega) = -1/2 + 1/2e^{-i\omega}.$$

Osserviamo che  $g(0) = 0$  e che  $(g^0)'(0) \neq 0$ , quindi per la Proposizione 1.5.1, la funzione ondina di Haar ha un solo momento nullo.

Un passaggio di Lifting produrrà un nuovo insieme di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ , legato al precedente tramite le relazioni del Corollario 4.2.1. In particolare avremo

$$g(\omega) = g^0(\omega) - h(\omega)s(2\omega).$$

Perchè la funzione  $\Psi$  abbia almeno un momento nullo deve avvenire  $g(0) = 0$ , per averne due dovrà valere anche  $g'(0) = 0$ , e quindi

$$0 = g'(0) = (g^0)'(0) - 2h(0)s'(0) + h'(0)s(0).$$

Queste due richieste implicano

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s'(0) = -i/4 \end{cases}.$$

Per preservare la simmetria del sistema di Haar, sceglieremo

$$s(\omega) = -i/4 \operatorname{sen}\omega = -\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{8}.$$

e quindi, grazie al Corollario 4.2.1, si ha  $\tilde{h}, g$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= (1/2 + 1/2e^{-i\omega}) + (1/2 - 1/2e^{-i\omega})1/8\overline{(e^{-i2\omega} - e^{i2\omega})} \\ g(\omega) &= (-1/2 + 1/2e^{-i\omega}) - (1/2 + 1/2e^{-i\omega})1/8(e^{-i2\omega} - e^{i2\omega}). \end{aligned}$$

Il nuovo insieme  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  che realizza ricostruzione perfetta sarà quindi composto da

$$\begin{aligned} h(\omega) &= 1/2 + 1/2e^{-i\omega}, \\ \tilde{h}(\omega) &= 1/16e^{2i\omega} - 1/16e^{i\omega} + 1/2 + 1/2e^{-i\omega} - 1/16e^{-2i\omega} + 1/16e^{-3i\omega}, \\ g(\omega) &= -1/16e^{2i\omega} - 1/16e^{i\omega} - 1/2 + 1/2e^{-i\omega} + 1/16e^{-2i\omega} + 1/16e^{-3i\omega}, \\ \tilde{g}(\omega) &= -1/2 + 1/2e^{-i\omega}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Come prova del fatto che questi filtri realizzano ricostruzione perfetta, è immediato verificare che  $g$  e  $\tilde{h}$ ,  $h$  e  $\tilde{g}$  soddisfano le (3.23).

Non occorre verificare l'esistenza di  $\{\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi, \tilde{\Psi}\}$ , funzioni di  $L^2(\mathfrak{R})$  associate a questi filtri, poiché i prodotti (3.25) e (3.26) convergono uniformemente su tutti i compatti, dal momento che i filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  sono FIR.

Anche la biortogonalità di questo sistema di funzioni è garantita, grazie allo Schema di Lifting.

Con questo procedimento abbiamo aumentato il numero dei momenti nulli delle funzioni  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$ , il Teorema 3.3.1 allora garantisce che, a partire da questi filtri, avremo

una coppia di basi biortogonali. Sempre grazie alla Proposizione 1.5.1 abbiamo un'informazione aggiuntiva, la funzione ondina  $\Psi$  avrà due momenti nulli.

Vediamo ora qualche applicazione pratica.

Per eseguire la codifica in sottobande, basta disporre dei filtri e non occorre conoscere l'espressione analitica delle funzioni.

Si parte dai coefficienti  $\{a_{j+1}[p]\} = \{\langle f(x), \phi_{j+1}(x-p) \rangle\}$ , e si ricavano i coefficienti  $\{a_j[p]\} = \{\langle f(x), \phi_j(x-p) \rangle\}$  e  $\{d_j[p]\} = \{\langle f(x), \psi_j(x-p) \rangle\}$ , mediante le formule (3.3), (3.4),

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p]a_{j+1}[n], \\ d_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p]a_{j+1}[n]. \end{aligned}$$

Per la ricostruzione seguiremo il procedimento del Teorema 3.1.1 basandoci però sui filtri  $\tilde{h}, \tilde{g}$

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}[p-2n]a_j[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}[p-2n]d_j[n].$$

Osserviamo che nel caso di una scomposizione basata sui filtri (4.11), per  $j$  abbastanza grande vale

$$\langle f, \phi_{j,n} \rangle = \int_{n2^{-j}}^{(n+1)2^{-j}} 2^j f(x) dx \approx 2^j f((n+1/2)2^{-j}),$$

questo poiché la funzione  $\phi$  associata al filtro  $h$  è una funzione caratteristica, come detto nel paragrafo 1.6. Ha quindi senso sostituire alla media in  $[n2^j, (n+1)2^j]$  di  $f$ , il valore che essa assume nel punto medio di tale intervallo. A partire da tali coefficienti è possibile eseguire la scomposizione e la ricostruzione basandoci sui filtri  $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ . Prima di sviluppare questi calcoli in un esempio è bene introdurre un'altra proprietà dei filtri ottenuti mediante Lifting.

Vediamo come possiamo semplificare uno schema di codifica in sottobande se sappiamo che il sistema di filtri  $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$  è stato ottenuto dal sistema  $\{h, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}\}$  grazie ad un Lifting di coefficienti  $\{s_k\}_k$ .

Ricordiamo allora le relazioni che intercorrono tra tali filtri, grazie al Corollario 4.2.1 vale

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= \tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega)\overline{s(2\omega)}, \\ g(\omega) &= g^0(\omega) - h(\omega)s(2\omega). \end{aligned}$$

Analizziamo il segnale digitale  $S(\omega)$  che viene processato dallo schema di figura 3.7, nelle tre fasi indicate dalle linee tratteggiate.

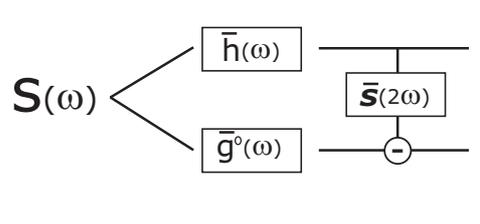


Figura 4.1: Prima fase: Scomposizione modificata da Lifting

- i) Si realizza la divisione del segnale in bande, mediante i filtri di scomposizione  $\bar{h}, \bar{g}$ .  
Chiameremo

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= S(\omega) \overline{\bar{h}(\omega)} && \text{il segnale sulla banda bassa,} \\ S_2(\omega) &= S(\omega) \overline{\bar{g}^0(\omega)} && \text{il segnale sulla banda alta.} \end{aligned}$$

Il segnale  $S_1(\omega)$  non risente del Lifting, mentre sostituendo  $g(\omega) = g^0(\omega) - h(\omega)s(2\omega)$  in  $S_2(\omega)$  otteniamo

$$S_2(\omega) = S(\omega) [\overline{g^0(\omega)} - \overline{\bar{h}(\omega) s(2\omega)}] = S(\omega) \overline{g^0(\omega)} - S_1(\omega) \overline{s(2\omega)}.$$

Questo vuol dire che il segnale sulla banda alta può essere ottenuto dal prodotto con il *vecchio* filtro passa alto  $g^0$  e da un contributo del segnale sulla banda alta, moltiplicato per  $\overline{s(2\omega)}$ .

Questo può essere riassunto nello schema di figura 4.1.

- ii) In questa parte si realizza successivamente Decimazione ed Upsampling su entrambe le bande del segnale.

Per comodità di calcolo applicheremo entrambe le operazioni grazie alla formula (3.6),

$$S(\omega) \rightarrow S(\omega) + S(\omega + \pi).$$

Indicheremo con  $S_1^d(\omega)$  e con  $S_2^d(\omega)$  i segnali sulle due bande al termine di questo procedimento, ossia

$$\begin{aligned} S_1^d(\omega) &= S_1(\omega) + S_1(\omega + \pi), \\ S_2^d(\omega) &= S(\omega) \overline{g^0(\omega)} + S(\omega + \pi) \overline{g^0(\omega + \pi)} - [S_1(\omega) + S_1(\omega + \pi)] \overline{s(2\omega)}. \end{aligned}$$

Quindi questa parte di schema può essere rappresentata come in figura 4.2.

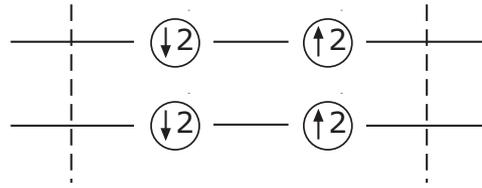


Figura 4.2: Seconda fase: Decimatore ed Upsampler

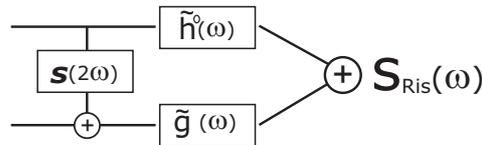


Figura 4.3: Terza fase: Ricostruzione del segnale

- iii) La terza fase consiste nell'applicare rispettivamente i filtri duali per la ricostruzione  $\tilde{h}, \tilde{g}$ . Ricordiamo allora che  $\tilde{h}(\omega) = \tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega)\overline{s(2\omega)}$  e quindi sulle due bande avremo rispettivamente,

$$\begin{aligned} S_1^d(\omega)[\tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega)\overline{s(2\omega)}] \\ S_2^d(\omega)\tilde{g}(\omega) \end{aligned}$$

Abbiamo così ricondotto la codifica in sottobande in funzione dei filtri  $h, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}$  e dei coefficienti  $\{s_k\}_k$ .

Notiamo che sulla banda bassa viene richiesto di applicare il filtro  $\tilde{g}$ , filtro che si trova sull'altra banda del segnale.

Per risolvere questo problema si può mandare una copia del segnale che risiede in banda bassa, sulla banda alta. In tal modo si può mettere sulla banda bassa il filtro  $\tilde{h}^0(\omega)$ . Possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(\omega) &= S_1^d(\omega)\tilde{h}^0(\omega) \\ \tilde{S}_1(\omega) &= [S_2^d(\omega) + S_1^d(\omega)\overline{s(2\omega)}]\tilde{g}(\omega) \end{aligned}$$

Questo non altera il procedimento di figura 3.6, poiché alla fine compare la somma della banda bassa e della banda alta del segnale. Quanto detto si riassume nello schema di figura 4.3.

Abbiamo così dimostrato che lo schema di ricostruzione perfetta con filtri modificati da un passaggio di lifting, viene quindi rappresentato come in figura 4.4.

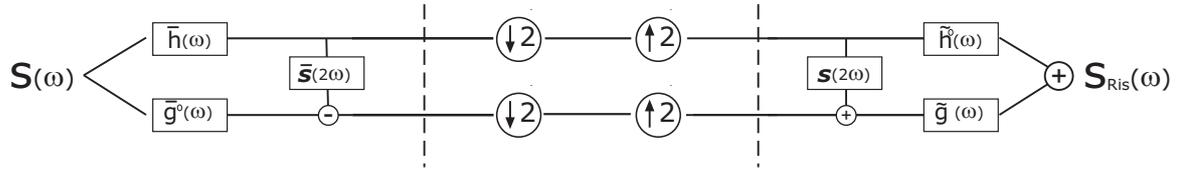


Figura 4.4: Schema di Codifica in Sottobande con Lifting di coefficienti  $s_k$

Ovviamente il nuovo sistema di filtri  $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ , realizza ricostruzione perfetta poiché è stato ottenuto tramite un passaggio di lifting dal sistema  $\{h, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}\}$ .

Verifichiamo che  $\tilde{S}_1(\omega) + \tilde{S}_2(\omega)$  coincide con  $S(\omega)$ . Dopo aver sviluppato i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(\omega) + \tilde{S}_2(\omega) = S(\omega) & [\overline{h(\omega)} \tilde{h}^0(\omega) + \overline{g^0(\omega)} \tilde{g}(\omega)] + \\ & S(\omega + \pi) [\overline{h(\omega + \pi)} \tilde{h}^0(\omega) + \overline{g^0(\omega + \pi)} \tilde{g}(\omega)]. \end{aligned}$$

Ricordiamo che i filtri  $g^0$  e  $\tilde{g}$  sono definiti dalle (3.21) e che i filtri  $h$  e  $\tilde{h}^0$  soddisfano le (3.22), questo implica immediatamente

$$\begin{cases} \overline{h(\omega)} \tilde{h}^0(\omega) + \overline{g^0(\omega)} \tilde{g}(\omega) = 1, \\ \overline{h(\omega + \pi)} \tilde{h}^0(\omega) + \overline{g^0(\omega + \pi)} \tilde{g}(\omega) = 0, \end{cases}$$

e quindi

$$\tilde{S}_1(\omega) + \tilde{S}_2(\omega) = S(\omega).$$

Da quanto detto ora segue che per utilizzare un sistema su cui si è operato un passaggio di Lifting non occorre conoscere i nuovi filtri  $\tilde{h}$  e  $g$ , la codifica in sottobande può essere eseguita in termini del sistema di filtri iniziali  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ , e dei coefficienti di Lifting  $\{s_k\}_k$ .

Vediamo ora di riportare lo schema appena descritto in formule simili a (3.3), - (3.5). Prima di tutto è bene modificare leggermente lo schema di figura 4.4 in modo da separare la fase di scomposizione da quella di ricostruzione. Questo permetterà di eseguire scomposizioni successive, come negli schemi di figura 3.1, 4.11, 4.12.

Esistono leggi che regolano gli scambi d'ordine di applicazione di diversi sistemi. Utilizziamo queste per introdurre il passaggio di Lifting tra Decimatore ed Upsampler, in modo da separare la fase di scomposizione da quella di ricostruzione. Eseguire il prodotto con il filtro  $\{s_{2k}\}$  seguito da decimazione, equivale ad eseguire decimazione seguita da prodotto con  $\{s_k\}$ . E lo stesso avviene nella fase di ricostruzione. Tale legge [cfr Vetterli] è riassunta in figura 4.5.

Si ottiene quindi lo schema di figura 4.6.

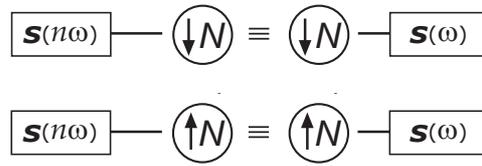


Figura 4.5: Legge di Commutabilità tra Decimatore e Filtri

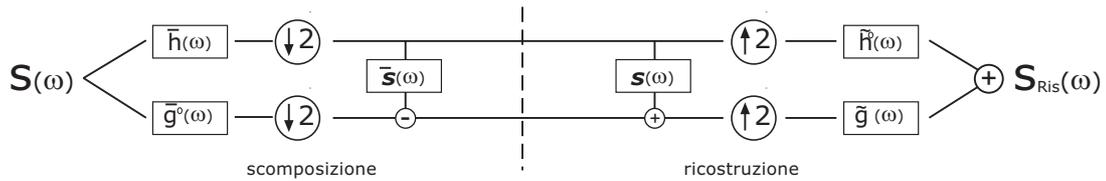


Figura 4.6: Schema di codifica in sottobande con Lifting. In questo schema sono state divise la fase di Scomposizione e di Ricostruzione, in modo da poter iterare tali procedimenti come illustrato in figure 3.2 e 3.3.

La scomposizione inizialmente risulta identica a (3.3) e (3.4), mantenendo i filtri  $h, g^0$ . Avremo quindi

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n - 2p]a_{j+1}[n], \\ d_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^0[n - 2p]a_{j+1}[n]. \end{aligned}$$

Viene poi eseguito il lifting sulla banda alta, come illustrato in figura 4.6, e banalmente si ha

$$d_j^l[p] = d_j[p] - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n - p]a_j[n].$$

Questo chiude la fase di scomposizione. Nel caso si volesse eseguire una seconda scomposizione si conservano i coefficienti  $d_j[p]$  e si ripete la scomposizione a partire da  $a_j[p]$ . Nella pratica, affinché la scomposizione risulti vantaggiosa, vengono eseguite delle approssimazioni sulle stringhe di coefficienti, come in figura 3.4.

La ricostruzione incomincia con un secondo passaggio di Lifting che, seguendo lo schema, produce i seguenti coefficienti.

$$d_j[p] = d_j^l[p] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n - p]a_j[p].$$

Quindi si procede con l'Upsampler seguito dai filtri  $\tilde{h}^0$  e  $\tilde{g}$ , utilizzati per la ricostruzione del segnale su entrambe le bande. Indicheremo ancora con  $a_j$  e  $d_j$  tale segnale,

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}^0[p-2n]a_j[n], \\ d_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}[p-2n]d_j[n]. \end{aligned}$$

Infine si sommano i due segnali ottenuti e si ha ricostruzione perfetta

$$a_{j+1}[p] = a_j[p] + d_j[p].$$

Com'è immediato notare i contributi del lifting si annullano. Da un lato questo chiarisce il perchè al termine del procedimento si ottiene ricostruzione perfetta.

Dall'altro sembra rendere inutile il passaggio di Lifting. Per capirne l'utilità bisogna ancora una volta pensare alle applicazioni pratiche e quindi ad una successiva fase di approssimazione dei coefficienti, il procedimento diventa quindi quello descritto dalle figure 3.4 e 3.5.

Osserviamo che il procedimento di lifting può essere banalmente iterato. Se si esegue la scomposizione e la ricomposizione con  $\{h, \tilde{h}^n, g^n, \tilde{g}\}$ , filtri ottenuti da  $n$  lifting di  $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ , tutto il procedimento può essere eseguito, con operazioni molto semplici, basandosi solamente sui coefficienti di lifting e sul sistema iniziale.

La codifica in sottobande col sistema appena ottenuto è quindi analoga ad eseguire i seguenti passaggi:

**i)** Scomposizione con  $(h, g^0)$  e decimazione su entrambe le bande, analogo alle formule (3.3), (3.4).

**ii)** Passaggio di Lifting di coefficienti  $s_1 = -s_{-1} = 1/8$

$$d_j^l[k] = d_j[k] + 1/8a_j[k+1] - 1/8a_j[k-1].$$

Eventualmente i coefficienti  $\{d_j^l[k]\}$  vengono approssimati.

**iii)** La fase di ricostruzione inizia con un passaggio di lifting inverso

$$d_j[k] = d_j^l[k] + 1/8a_j^l[k-1] - 1/8a_j^l[k+1].$$

**iv)** Si ricostruisce definitivamente il segnale con un Upsampler, i filtri  $(\tilde{h}^0, \tilde{g})$ , e sommando le due bande, si applica cioè la formula (3.5).

Proviamo ora ad eseguire un passaggio di lifting alle ondine D4, presentate nel paragrafo 1.7. I coefficienti non nulli del filtro sono

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

mentre il filtro passa alto  $g^0(\omega)$  è definito dalla formula 3.21,

$$g^0(\omega) = -\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{i2\omega} + \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{i\omega} - \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-i\omega}.$$

Eseguiamo un passaggio di lifting per alzare il numero di momenti nulli della funzione ondina rappresentata dal filtro  $g^0$ . Tale ondina ha due momenti nulli, grazie al di Daubechies.

Determiniamo opportuni coefficienti di Lifting  $s_k$ , in modo da ottenere

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = 0.$$

Si ottiene che il polinomio trigonometrico  $s(\omega)$  deve soddisfare le seguenti condizioni

$$s(0) = s'(0) = 0, \quad s''(0) = \sqrt{3}/8.$$

Scegliamo come soluzione  $s(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{16} \sin^2 \omega$  e quindi

$$s(2\omega) = \frac{\sqrt{3}}{64} (e^{4i\omega} + e^{-4i\omega} - 2)$$

Questo corrisponde alla seguente scelta di coefficienti  $s_k$

$$s_{-2} = s_2 = \frac{\sqrt{3}}{64}, \quad s_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{64}.$$

Un procedimento di scomposizione in sottobande basato sulle ondine D4 e sulle ondine D4 modificate mediante questo passaggio di lifting è stato realizzato con Maple 9. La struttura del programma e i risultati ottenuti sono riportati nell' Appendice.

Il Lifting può anche venir applicato all'ondina duale, passando dal sistema  $\{h^0, \tilde{h}, g, \tilde{g}^0\}$  al nuovo sistema di filtri  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ . Questo passaggio viene chiamato Lifting Duale ed ha espressioni analoghe a quelle del Teorema 4.2.1, vedremo meglio nel prossimo paragrafo come utilizzarlo. Anticipiamo però che se ripetessimo il procedimento appena descritto per operare un Lifting Duale sull'ondina di Haar o sull'ondina D4, otterremmo gli stessi risultati poiché  $\Phi = \tilde{\Phi}$ .

Si rivelerà molto utile, per la costruzione di basi di ondine biortogonali, alternare passaggi di Lifting a passaggi di Lifting duale, ad esempio per alzare il numero di momenti nulli sia di  $\Psi$  che di  $\tilde{\Psi}$ .

Nel prossimo paragrafo introdurremo una seconda rappresentazione per i filtri.

## 4.4 La rappresentazione polifase

Presentiamo ora un secondo modo di rappresentare i filtri che si rivela particolarmente efficace per il Lifting. Nei capitoli precedenti eravamo soliti associare ad ogni filtro la trasformata di Fourier discreta, la sua maschera

$$\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow h(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-i\omega n},$$

che per i filtri FIR corrisponde ad un polinomio trigonometrico.

Questa rappresentazione si rivela vantaggiosa per lo sviluppo dei calcoli visti, ma non è certo l'unica possibile.

Nei paragrafi che seguiranno ci riferiremo sempre a filtri FIR, poiché sono quelli di interesse maggiore per fini pratici. Incominciamo dalla seguente definizione, secondo l'impostazione di [Daubechies, Sweldens].

**Definizione 4.4.1** (Polinomio di Laurent associato ad un filtro FIR)

Sia  $\{h_n\}_{n=p, \dots, q}$  un filtro FIR, associamo ad esso la combinazione lineare a coefficienti reali così definita

$$h(z) = \sum_{n=p}^q h_n z^{-n}. \quad (4.12)$$

Banalmente il polinomio di Laurent si ottiene dalla maschera del filtro applicando la sostituzione,

$$e^{-i\omega} \longrightarrow (z)^{-1}.$$

**Definizione 4.4.2** (Grado di un polinomio di Laurent)

Sia  $h$  un polinomio di Laurent come in (4.12), il suo grado è definito

$$|h| = q - p.$$

Osserviamo che i monomi del tipo  $\lambda z^p$ , visti come polinomi di Laurent sono gli unici di grado zero. L'insieme dei polinomi di Laurent costituisce un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto tra polinomi, anello che denoteremo con  $(\mathfrak{R}[z, z^{-1}], +, *)$ .

All'interno di questo anello gli unici elementi invertibili risultano quindi essere i monomi  $\lambda z^p$   $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}$ , ciascuno dei quali ammette come inverso  $z^{-p} \lambda^{-1}$ .

Possiamo anche definire in maniera del tutto naturale le matrici quadrate  $2 \times 2$  a coefficienti in questo anello, indicheremo  $M(2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}])$  tale spazio vettoriale e con

$GL(2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}])$ , il sottospazio delle matrici invertibili, ossia quelle che hanno determinante uguale ad un monomio.

Le condizioni per la ricostruzione perfetta nel caso biortogonale (3.20), per i filtri FIR  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ , sono

$$\begin{cases} h(\omega)\overline{\tilde{h}(\omega)} + g(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega)} = 1 \\ h(\omega)\overline{\tilde{h}(\omega + \pi)} + g(\omega)\overline{\tilde{g}(\omega + \pi)} = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

La sostituzione  $e^{-i\omega} \rightarrow (z)^{-1}$  comporta che

$$\begin{aligned} h(\omega) &\rightarrow h(z), \\ h(\omega + \pi) &\rightarrow h(-z), \\ \overline{h(\omega)} &\rightarrow h(z^{-1}). \end{aligned}$$

Ora possiamo scrivere la (4.13) in termini di polinomi di Laurent,

$$\begin{cases} h(z)\tilde{h}(z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(z^{-1}) = 1 \\ h(z)\tilde{h}(-z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(-z^{-1}) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Se definiamo,

**Definizione 4.4.3** (Matrice di modulazione)

Data la coppia di filtri FIR  $(h, g)$ , si chiama Matrice di Modulazione dei filtri

$$M(z) = \begin{bmatrix} h(z) & h(-z) \\ g(z) & g(-z) \end{bmatrix}$$

In maniera analoga si definisce  $\tilde{M}(z)$  a partire da  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ .

Osserviamo che questa matrice corrisponde alla trasposta della matrice di modulazione (3.11) presentata nel capitolo precedente. Nella codifica in sottobande operare con le matrici trasposte è equivalente a scegliere la coppia di filtri  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  per la scomposizione, e la coppia  $(h, g)$  per la ricostruzione. Facciamo questo cambiamento per mantenere le notazioni dell'articolo di Daubechies e Sweldens [Daubechies, Sweldens]. Le condizioni di ricostruzione perfetta non risentono di questo cambiamento, dal momento che le matrici di modulazione sono matrici quadrate, possiamo quindi riscrivere le (4.14) nella forma seguente

$$\tilde{M}(z^{-1})^t M(z) = \mathbf{I}_2. \quad (4.15)$$

Da questo segue che per avere ricostruzione perfetta dovrà accadere  $M(z)$  e  $\tilde{M}(-z^{-1}) \in GL(2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}])$ .

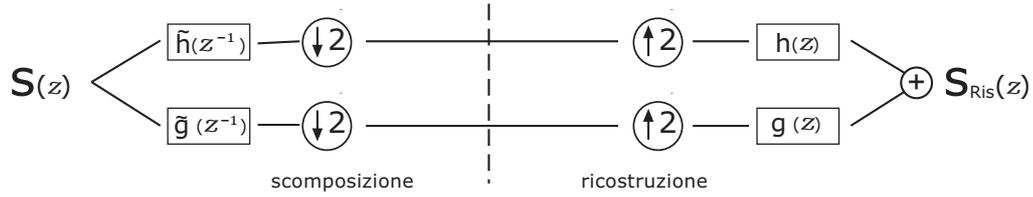


Figura 4.7: Schema di codifica in sottobande con polinomi di Laurent

Osserviamo che, a seconda del tipo di normalizzazione richiesta ai filtri, si può richiedere al posto della (4.15),  $\widetilde{M}(z^{-1})^t M(z) = 2\mathbf{I}_2$ .

Lo schema di codifica in sottobande è rappresentato dalla figura 4.7.

È sempre possibile scrivere un polinomio di Laurent come somma di una parte pari e di una dispari, in maniera tale che risulti

$$h(z) = h_e(z^2) + z^{-1}h_o(z^2),$$

dove  $h_e$  e  $h_o$  sono i polinomi costruiti solo con i termini del filtro  $h$  di posto pari e posto dispari, ossia

$$h_e(z) = \sum_k h_{2k}z^{-k} \quad e \quad h_o(z) = \sum_k h_{2k+1}z^{-k}, \quad (4.16)$$

oppure

$$\begin{aligned} h_e(z^2) &= \frac{h(z) + h(-z)}{2} \\ h_o(z^2) &= \frac{h(z) - h(-z)}{2z^{-1}} \\ h(z) &= h_e(z^2) + h_o(z^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Allo stesso modo si definiscono  $g_e$  e  $g_o$ .

Possiamo ora definire

**Definizione 4.4.4** (Matrice Polifase)

La matrice polifase di un determinato insieme di filtri FIR  $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$  è la matrice

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix},$$

in maniera analoga si definisce  $\widetilde{P}(z)$ .

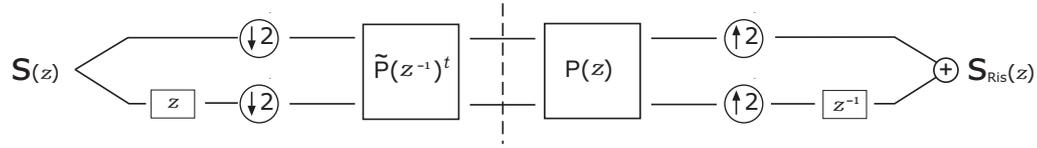


Figura 4.8: Schema di Codifica in Sottobande con Rappresentazione Polifase

Per capire questa rappresentazione occorre vedere come agisce sullo schema di codifica in sottobande di figura 4.7.

Se sostituiamo ai filtri  $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$  la loro espressione data da (4.17), risulta evidente che la codifica in sottobande può essere riassunta nello schema di figura 4.8.

Nella parte iniziale di questo schema il segnale  $S(z)$  viene diviso in banda alta e banda bassa e, prima di essere processato dal sistema  $\tilde{P}(z^{-1})^t$ , corrisponde al vettore  $[S_1(z), S_2(z)]$ .

L'azione dei filtri in rappresentazione polifase su questo segnale risulta quindi

$$\begin{bmatrix} S_1(z) & S_2(z) \end{bmatrix} P(z) = \begin{bmatrix} S_1(z) & S_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix}.$$

L'applicazione di un sistema e la loro composizione equivale quindi ad un prodotto matriciale, per questo la condizione di ricostruzione perfetta equivale a

$$P(z)\tilde{P}(z^{-1})^t = I_2. \quad (4.18)$$

Abbiamo mostrato quindi che se la codifica in sottobande rappresentata in figura 4.7 realizza ricostruzione perfetta, se vale cioè (4.15), allora varrà la relazione (4.18) tra le rispettive matrici polifase. Quanto detto si riassume

$$\tilde{M}(z^{-1})^t M(z) = \mathbf{I}_2 \implies P(z)\tilde{P}(z^{-1})^t = I_2.$$

Prima di mostrare i legami che intercorrono tra la matrice polifase e la matrice di modulazione, facciamo presente che l'azione della prima parte della codifica di figura 4.8 corrisponde ad una scomposizione rispetto alla Lazy Wavelet. L'azione di questi filtri è una suddivisione del segnale su banda alta e banda bassa e può sembrare inutile. Vedremo nel seguito la centralità di questi filtri grazie al Teorema di Fattorizzazione. Per questo motivo la codifica in sottobande prodotta dalla Lazy Wavelet viene presentata nello schema di figura 4.9.

Torniamo ora alle condizioni di ricostruzione perfetta ed enunciamo la seguente

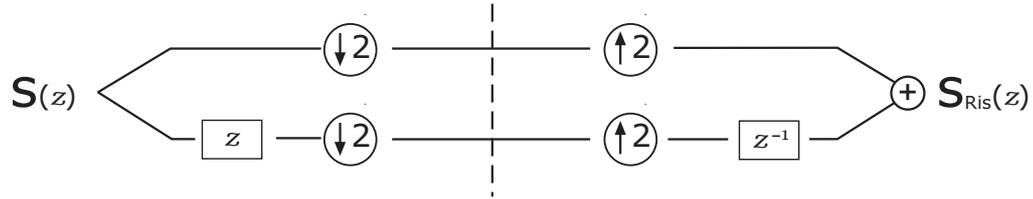


Figura 4.9: Codifica in Sottobande con Lazy Wavelet, ossia suddivisione del segnale in banda alta e banda bassa

**Proposizione 4.4.1** (Legame tra matrice polifase e matrice di modulazione)

Sia  $P(z)$  la rappresentazione polifase di un determinato insieme di filtri allora vale

$$P(z^2)^T = 1/\sqrt{2} M(z) \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

La dimostrazione di tale proposizione è un immediato calcolo matriciale. Ora è possibile rileggere le condizioni di ricostruzione perfetta (4.15) sulla matrice polifase, grazie alla seguente proposizione

**Proposizione 4.4.2** (Ricostruzione perfetta per la matrice polifase)

Il sistema di filtri biortogonali  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  realizza ricostruzione perfetta se e solo se le corrispondenti matrici polifase soddisfano

$$P(z)\tilde{P}(z^{-1})^t = \mathbf{I}_2, \quad (4.20)$$

**DIMOSTRAZIONE**

Un verso dell'implicazione è già stato dimostrato con le considerazioni precedenti. La dimostrazione dell'altro verso è un semplice calcolo matriciale che si basa sulla (4.19). Supponiamo che valga (4.20), allora deve valere anche

$$P(z^2)\tilde{P}(z^{-2})^t = \mathbf{I}_2,$$

ma, poiché il prodotto di matrici inverse è commutativo, si ha

$$\tilde{P}(z^{-2})^t P(z^2) = \mathbf{I}_2.$$

Sostituiamo ora la (4.19) e otteniamo

$$1/\sqrt{2} M(z^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & -z^{-1} \end{bmatrix} 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix}^T \widetilde{M(z)}^T = \mathbf{I}_2$$

ossia

$$M(z)^T \widetilde{M}(z^{-1}) = \mathbf{I}_2.$$

I vantaggi dell'uso di matrici per rappresentare filtri sono evidenti: l'applicazione di filtri corrisponde al prodotto delle matrici polifase.

La condizione (4.20) implica che  $P(z) \in GL[2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}]]$ , e quindi  $\det(P(z)) = \lambda z^p$ .

Potremo quindi assumere senza perdita di generalità, che valga  $\det(P(z)) = 1$ .

Questa è l'unica richiesta da porre perchè tramite i filtri FIR biortogonali,  $\{h, \widetilde{h}, g, \widetilde{g}\}$  si abbia ricostruzione perfetta. Per ricondurci in questo caso basterà infatti modificare il filtro passa alto  $g$  dividendo  $g_e$  e  $g_o$  per  $\det(P(z))$ , che per il Teorema di Chui modifica le relazioni di biortogonalità, ma permette di ottenere una matrice polifase di determinante uno.

Quindi, trovare una coppia di basi biortogonali i cui filtri realizzano ricostruzione perfetta equivale a determinare una coppia di matrici  $P(z), \widetilde{P}(z) \in SL[2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}]]$  che siano l'una l'inversa dell'altra, cioè

$$P(z) = (\widetilde{P}(z^{-1})^t)^{-1} \quad \text{con} \quad \det(P(z)) = \det(\widetilde{P}(z)) = 1.$$

Detto questo, la regola di Cramer ci permette di determinare l'inversa di una qualsiasi matrice  $P(z) \in SL[2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}]]$ . La matrice  $\widetilde{P}(z)$  è quindi definita nel seguente modo

$$\widetilde{h}_e(z) = g_o(z^{-1}), \quad \widetilde{h}_o(z) = -g_e(z^{-1}), \quad \widetilde{g}_e(z) = -h_o(z^{-1}), \quad \widetilde{g}_o(z) = h_e(z^{-1}), \quad (4.21)$$

ossia, in termini di filtri

$$\widetilde{g}(z) = z^{-1}h(-z^{-1}) \quad \text{e} \quad \widetilde{h}(z) = -z^{-1}g(-z^{-1}). \quad (4.22)$$

Abbiamo quindi ottenuto una formula per il calcolo dei filtri duali, a partire dalla coppia di filtri complementari,  $(h, g)$ , rispondendo così alla prima questione al termine paragrafo 3.2.

In generale, non possiamo concludere l'unicità di una coppia di filtri che soddisfa la richiesta della definizione (3.22).

Se, come esempio più banale si sceglie  $P(z) = \mathbf{I}_2$ , si ottiene

$$\begin{aligned} h_e = 1, h_o = 0 \quad \text{cioè} \quad h_0 = 1, h_n = 0, n \neq 0 \quad \text{e quindi} \quad h(z) = 1. \\ g_e = 0, g_o = 1 \quad \text{cioè} \quad g_1 = 1, g_n = 0, n \neq 1 \quad \text{e quindi} \quad g(z) = z^{-1}. \\ \text{da queste segue} \quad \widetilde{h}(z) = 1 \quad \text{e} \quad \widetilde{g}(z) = z^{-1}. \end{aligned}$$

Questo caso corrisponde alla Lazy Wavelet, alla quale avevamo già accennato. Grazie alla rappresentazione polifase risulta evidente la spiegazione del termine Lazy. La codifica eseguita da questi filtri risulta una semplice divisione del segnale su due bande, come riportato in figura 4.9.

## 4.5 Lo schema di Lifting in rappresentazione polifase

Vista l'importanza delle matrici di  $SL[2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}]]$  diamo la seguente definizione

**Definizione 4.5.1** (Filtri complementari)

*Siano  $(h, g)$  una coppia di filtri FIR, diciamo che sono complementari se la corrispondente matrice polifase  $P(z) \in SL[2, \mathfrak{R}[z, z^{-1}]]$ .*

Osserviamo che a partire da una coppia di filtri complementari  $(h, g)$  è sempre possibile costruire una seconda coppia  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ , i loro filtri duali, che, grazie alle formule (4.22), risultano anch'essi complementari.

Grazie alla rappresentazione polifase risulta immediato dimostrare il seguente teorema dovuto a Daubechies e Sweldens. [cfr Daubechies, Sweldens]

**Teorema 4.5.1** (Schema di Lifting in rappresentazione polifase)

*Siano  $(h^0, g^0)$  una coppia di filtri complementari. Tutti e soli i filtri  $g$  complementari ad  $h^0$  sono della forma*

$$g(z) = g^0(z) + h^0(z)s(z^2). \quad (4.23)$$

*Analogamente tutti e soli i filtri  $h$  complementare a  $g^0$  sono della forma*

$$h(z) = h^0(z) + g^0(z)t(z^2), \quad (4.24)$$

*dove  $s, t$  sono polinomi di Laurent.*

### DIMOSTRAZIONE

Per mostrare che i filtri  $(h^0, g)$  sono complementari basta far vedere che, detta  $P(z)$  la matrice polifase di tale coppia, si ha  $\det(P(z)) = 1$ . Osserviamo che

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove  $P^0(z)$  è la rappresentazione polifase della coppia  $(h^0, g^0)$ , quindi banalmente si ha che  $\det(P(z)) = 1$ .

La dimostrazione della seconda parte dell'enunciato è analoga, poiché si ha

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix}.$$

Per dimostrare che tutti i filtri complementari ad una coppia data sono di quella forma basta richiamare il Corollario 4.2.2.

Alla luce di questi risultati ha quindi senso definire

**Definizione 4.5.2** (Matrici di Lifting)

Siano  $s, t$  due polinomi di Laurent, allora le matrici

$$L_s(z) = \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{L}_t(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

sono dette rispettivamente matrice di Lifting (di coefficienti  $s$ ) e matrice di Lifting Duale (di coefficienti  $t$ ).

Tuttavia non abbiamo ancora definito come il passaggio di Lifting agisce sulla coppia di filtri duali  $(\tilde{h}^0, \tilde{g}^0)$ , definiti dalle formule (4.22). Dette  $\tilde{P}^0(z)$  e  $\tilde{P}(z)$  le rispettive matrici polifase duali, si ha

$$\tilde{P}(z) = \tilde{P}^0(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s(-z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{P}(z) = \tilde{P}^0(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t(-z^{-1}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente corollario

**Corollario 4.5.1** (Lifting e Lifting Duale in rappresentazione polifase)

Sia  $(h^0, g^0)$  una coppia di filtri complementari, un passaggio di Lifting di coefficienti  $\{s_k\}_{k \in K}$  produce il seguente sistema biortogonale  $\{h^0, g, \tilde{h}, \tilde{g}^0\}$ , ponendo

$$\begin{cases} g(z) = g^0(z) + h^0(z)s(z^2) \\ \tilde{h}(z) = \tilde{h}^0(z) - \tilde{g}^0(z)s(z^{-2}) \end{cases} \quad (4.26)$$

dove i filtri  $(\tilde{h}^0, \tilde{g}^0)$  sono ottenuti dalle formule (4.22).

Un passaggio di Lifting Duale di coefficienti  $\{t_k\}_{k \in K}$  produce il sistema  $\{h, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}\}$ , dove si è posto

$$\begin{cases} h(z) = h^0(z) + g^0(z)t(z^2) \\ \tilde{g}(z) = \tilde{g}^0(z) - \tilde{h}^0(z)t(z^{-2}) \end{cases} \quad (4.27)$$

con  $(\tilde{h}^0, \tilde{g}^0)$  dati da (4.22).

Osserviamo che le formule (4.26) corrispondono alle formule del Corollario 4.2.1, mentre le formule del Lifting Duale (4.27) non erano state presentate nei paragrafi precedenti.

Osserviamo inoltre che le matrici coinvolte nella dimostrazione del Teorema 4.5.1 sono matrici di Lifting, da questo segue banalmente

### Corollario 4.5.2

*Sia  $(h^0, g^0)$  una coppia di filtri complementari. Tutti e soli i filtri  $h$  complementari a  $g^0$  sono ottenuti con un Lifting da  $(h^0, g^0)$ . Tutti e soli i filtri  $g$  complementari a  $h^0$  si ottengono con un Lifting Duale da  $(h^0, g^0)$ .*

Osserviamo infine che, grazie alla rappresentazione polifase, l'effetto di diversi passaggi di Lifting e di Lifting Duale può essere rappresentato dal prodotto delle rispettive matrici.

## 4.6 Scomposizione in Lifting

In questo paragrafo dimostreremo che qualsiasi insieme biortogonale di filtri FIR che realizza ricostruzione perfetta può essere ottenuto alternando passaggi di Lifting e di Lifting duale a partire dai filtri  $(h, g)$  associati alla Lazy Wavelet.

Sfruttando la rappresentazione polifase, si tratterà di mostrare che una matrice polifase qualunque può essere ottenuta come prodotto di matrici della forma della Definizione 4.5.2.

Da questo fatto puramente algebrico, segue che tutte le basi biortogonali di ordine riconducibili con filtri FIR possono essere ottenute come composizione di Lifting e di Lifting Duali a partire dalla Lazy Wavelet.

Partiamo dall'enunciare la seguente proposizione che è l'analogo dell'algoritmo di fattorizzazione euclideo per i polinomi di Laurent.[cfr Daubechies, Sweldens]

### Proposizione 4.6.1 (Algoritmo Euclideo per polinomi di Laurent)

*Siano  $a(z)$  e  $b(z) \neq 0$  due polinomi di Laurent, e supponiamo valga  $|a(z)| \geq |b(z)|$ . Poniamo  $a_0(z) = a(z)$  e  $b_0(z) = b(z)$  e iteriamo il seguente procedimento a partire da  $i = 0$ .*

$$\begin{aligned} a_{i+1}(z) &= b_i(z), \\ b_{i+1}(z) &= a_i(z) \text{ mod } b_i(z), \end{aligned}$$

dove con  $a_i(z) \bmod b_i(z)$  si intende il resto della divisione  $a_i(z)/b_i(z)$ .

Allora vale che  $a_n(z) = MCD(a(z), b(z))$ , dove  $n$  è il più piccolo intero per cui vale  $|b_n(z)| = 0$ .

Osserviamo la struttura dell'algoritmo è analoga a quella del noto algoritmo euclideo delle divisioni successive in  $Z$ . L'unica differenza sta nel fatto che per i polinomi di Laurent non si ha l'unicità della soluzione. Infatti fissato  $a_n(z) = MCD(a(z), b(z))$  avremo che  $a'_n(z) = MCD(a(z), b(z))$ , ponendo  $a'_n(z) = a_n(z)\rho(z)$ , con  $\rho(z) = \lambda z^p$ , questo è dovuto al fatto che nell'anello dei polinomi di Laurent gli unici elementi invertibili sono i monomi.

Sempre in analogia col caso della fattorizzazione in  $Z$  diciamo che due polinomi di Laurent  $a(z), b(z)$  sono relativamente primi se  $MCD(a(z), b(z)) = \lambda z^p$ .

Enunciamo e dimostriamo ora il seguente teorema dovuto a Daubechies e Sweldens [cfr Daubechies, Sweldens].

**Teorema 4.6.1** (Fattorizzazione in Lifting, Daubechies, Sweldens)

Siano  $(h, g)$  una coppia di filtri complementari e sia  $P(z)$  la corrispondente matrice polifase. Allora esistono sempre un numero finito di polinomi di Laurent  $s_i(z), t_i(z)$ , e una costante non nulla  $K$ , tali che

$$P(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & s_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

La matrice polifase duale di  $P(z)$  è quindi

$$\tilde{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Prima d'iniziare la dimostrazione osserviamo che il teorema fornisce due differenti fattorizzazioni per  $P(z)$  e per  $\tilde{P}(z)$ . Quindi nel caso ortonormale si hanno due fattorizzazioni distinte per la stessa matrice polifase. Questo sottolinea che la scomposizione in passaggi di Lifting non è unica.

#### DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione si basa essenzialmente sulla Proposizione 4.6.1, incominciamo a prendere in considerazione la coppia di filtri complementari  $(h, g)$ .

Osserviamo che i polinomi di Laurent  $h_e(z)$  e  $h_o(z)$  sono primi tra loro. Se così non fosse infatti, un eventuale fattore comune dovrebbe dividere anche  $\det(P(z)) = 1$ .

Quindi avremo che  $MCD(h_e(z), h_o(z)) = \lambda z^p$ . Possiamo supporre, in virtù della non unicità della divisione tra polinomi di Laurent, che sia  $MCD(h_e(z), h_o(z)) = K$  con  $K \in \mathbb{Z}$ ,  $K \neq 0$ .

Osserviamo inoltre che il caso  $|h_e(z)| = |h_o(z)|$  è da escludere per la costruzione di  $h_e$  ed  $h_o$ , come si vede in (4.16).

Supponiamo allora  $|h_e(z)| > |h_o(z)|$  e applichiamo la Proposizione 4.6.1 alla coppia  $h_e(z)$  e  $h_o(z)$ , avremo

$$\exists q_i(z) \ i = 0, \dots, n \ t.c \quad \begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove  $q_i(z)$  è un polinomio di Laurent e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq |h_e(z)|$  è l'intero positivo che rappresenta il numero dei fattori di tale scomposizione.

Nel seguito supporremo che  $n$  sia pari, se così non fosse si potrebbero modificare i filtri  $(h, g)$  in maniera tale da aggiungere un fattore alla scomposizione senza, alterare il fatto che siano complementari. Un modo consiste nel moltiplicare  $h(z)$  per  $z$  e  $g(z)$  per  $-z^{-1}$ , questa modifica non altera affatto i filtri perchè corrisponde ad uno spostamento dei coefficienti all'interno dello stesso filtro e, com'è facile verificare, mantiene il determinante della matrice polifase uguale ad uno. Così facendo si invertono le posizioni di  $h_e$  ed  $h_o$  all'interno della matrice polifase e si aggiunge un termine  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  alla fattorizzazione precedente.

Ai filtri  $(h, g)$  è associata  $P(z)$  matrice polifase, possiamo però costruire un secondo filtro  $g^0$ , in maniera tale che la coppia  $(h, g^0)$  sia ancora complementare e rappresentata da una matrice  $P^0(z)$  nel seguente modo

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che  $(h, g^0)$  così costruiti sono complementari, infatti il determinante del secondo membro è banalmente uno poiché  $n$  è pari.

Facciamo presente che valgono le seguenti proprietà

$$\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{bmatrix},$$

che permettono di raccogliere le matrici di Lifting e di Lifting duale dalla scomposizione precedente.

La matrice che realizza tale fattorizzazione è una matrice idempotente, infatti corrisponde all'endomorfismo di  $\mathfrak{R}^2$  che scambia l'asse  $x$  con l'asse  $y$ . Applichiamo allora queste due sostituzioni e otteniamo

$$P^0(z) = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{bmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}.$$

Abbiamo così dimostrato quindi che la coppia di filtri complementari  $(h, g^0)$  può essere ottenuta alternando  $n$  passaggi di Lifting e di Lifting Duale.

Per ritrovare la coppia iniziale di filtri complementari  $(h, g)$  basta applicare il Teorema 4.5.1, e quindi esiste un numero finito di coefficienti  $s_k$  tali per cui si ha

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questo chiude la dimostrazione del Teorema.

Ricordiamo che il risultato precedente è valido ovviamente nel caso si operi con filtri FIR, ai quali è possibile associare un polinomio di Laurent e una rappresentazione polifase.

Nel caso si disponesse di filtri IIR, si avrebbero delle serie al posto della (4.12), e non sarebbe possibile definire un concetto di grado, quindi il teorema non sarebbe dimostrabile. Il teorema è tuttavia valido nei casi di interesse applicativo, infatti qualsiasi base biortogonale di ordine  $n$  a supporto compatto può essere costruita mediante lo schema seguente:

- i) Si parte dalla Lazy Wavelet, ondina la cui matrice polifase corrisponde alla matrice identica.
- ii) Si esegue un cambiamento di scala, moltiplicando per la matrice

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}, \quad \text{dove } K \in \mathfrak{R} - \{0\}.$$

Anche questa matrice è facilmente esprimibile come prodotto di due coppie di Lifting e Lifting Duale, [cfr Daubechies, Sweldens 7.3]. Nella pratica è più comodo considerarla un sistema a parte poiché di facile realizzazione.

- iii) Si eseguono opportuni passaggi di Lifting e Lifting Duale. Ricordiamo che la scelta dei coefficienti può servire a migliorare alcune proprietà dell'ondina piuttosto che dell'ondina duale.

## 4.7 Osservazioni ed Esempi

Modifichiamo prima di tutto lo schema di codifica in sottobande di figura 4.6 alla luce dei risultati ottenuti occorre introdurre le seguenti modifiche:

- i) introduciamo il passaggio di Lifting Duale, passaggio che in analogia con quanto detto nel paragrafo 4.3 può essere rappresentato con lo schema di figura 4.10.

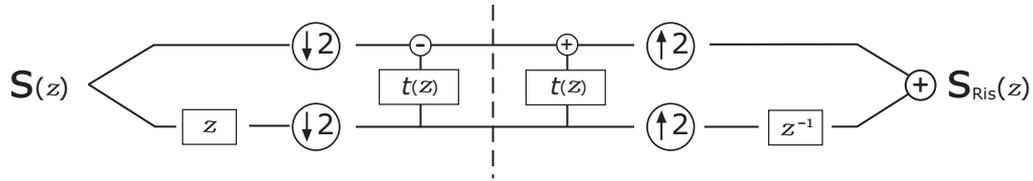


Figura 4.10: Passaggio di Lifting Duale nello schema di codifica in sottobande

- ii) Possiamo sempre supporre di partire dalla Lazy Wavelet come filtro iniziale.
- iii) Per comodità introdurremo un sistema di cambiamento di scala, rappresentato dalla matrice  $\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$ , dove  $K \in \mathfrak{R} - \{0\}$

Lo schema più generale di codifica in ondine biortogonali è rappresentato in figura 4.11 per la fase di scomposizione ed in figura 4.12, per la fase di ricostruzione.

Riportiamo un esempio di fattorizzazione in Lifting tratto da [Daubechies, Sweldens] e osserviamo com'è possibile riscrivere l'algoritmo. Mostriamo come l'ondina D4, presentata al termine del paragrafo 1.7, viene scomposta successivi passaggi di Lifting. La rappresentazione polifase dei filtri è

$$\begin{aligned} h(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} \\ g(z) &= -h_3 z^2 + h_2 z^1 - h_1 + h_0 z^{-1}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti sono

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

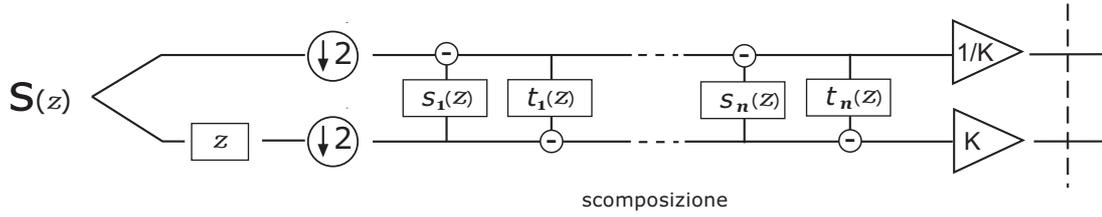


Figura 4.11: Fase di Scomposizione

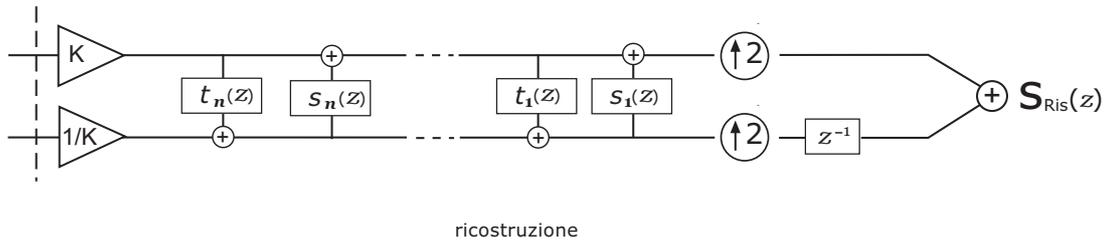


Figura 4.12: Fase di Ricostruzione

Calcoliamo la parte pari e la parte dispari dei filtri e costruiamo  $P(z)$  come in (4.4.4), si ha

$$P(z) = \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} h_0 + h_2 z^{-1} & -h_3 z^{-1} - h_1 \\ h_1 + h_3 z^{-1} & h_2 z + h_0 \end{bmatrix}.$$

Non svilupperemo i calcoli per la fattorizzazione in matrici della Definizione 4.5.2. Ci limiteremo a dire che utilizzando la Proposizione 4.6.1 si ottiene

$$P(z) = \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}-2}{4} z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la scomposizione ottenuta rispetta la forma della tesi del Teorema 4.6.1. Tale scomposizione non risulta l'unica possibile. Ricordiamo inoltre che, per una scelta di notazioni, il segnale verrà scomposto dalla matrice  $\tilde{P}(z^{-1})^t$  e ricomposto da  $P(z)$ .

La matrice  $\tilde{P}(z^{-1})^t$  ammetterà quindi la scomposizione seguente

$$\tilde{P}(z^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}-2}{4} z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo questi passaggi di Lifting dopo la Lazy Wavelet e il decimatore, come rappresentato in figura 4.11. L'effetto di questi sistemi risulta

$$\begin{cases} a_j^0[k] = a_j[2k] \\ d_j^0[k] = a_j[2k + 1] \end{cases} .$$

La prima matrice corrisponde ad un passaggio di Lifting di coefficienti  $s_0 = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a_j^1[k] = a_j[2k] \\ d_j^1[k] = a_j[2k + 1] - \sqrt{3}a_j[2k] \end{cases} .$$

La seconda matrice è una matrice di Lifting Duale di coefficienti  $t_0 = \sqrt{3}/4$  e  $t_1 = (\sqrt{3} - 2)/4$

$$\begin{cases} a_j^2[k] = a_j^1[k] + \sqrt{3}/4 d_j^1[k] + (\sqrt{3} - 2)/4 d_j^1[k + 1] \\ d_j^2[k] = d_j^1[k] \end{cases} .$$

Il terzo è ancora un passaggio di Lifting di coefficienti  $s_{-1} = 1$

$$\begin{cases} a_j^3[k] = a_j^2[k] \\ d_j^3[k] = d_j^2[k] + a_j^2[k - 1] \end{cases} .$$

Infine c'è il cambiamento di scala

$$\begin{cases} a_j^4[k] = (\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}})a_j^3[k] \\ d_j^4[k] = (\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}})d_j^3[k] \end{cases} .$$

La fase di ricostruzione si apre con il cambiamento di scala inverso, seguito dai passaggi inversi di Lifting e di Lifting Duale, come si può vedere in figura 4.12.

La sequenza di ricostruzione è quindi

$$\begin{aligned} a_j^1[k] &= (\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}})a_j^4[k] \\ d_j^2[k] &= (\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}})d_j^4[k] \\ d_j^1[k] &= d_j^2[k] - a_j^2[k - 1] \\ a_j[2k] &= a_j^1[k] - \sqrt{3}/4 d_j^2[k] - (\sqrt{3} - 2)/4 d_j^2[k + 1] \\ a_j[2k + 1] &= d_j^1[k] + \sqrt{3}a_j[2k]. \end{aligned}$$

Supponiamo ora di eseguire un solo passaggio di Lifting sul sistema di filtri iniziale  $\{\phi, \psi^0, \tilde{\phi}^0, \tilde{\psi}^0\}$ . Così facendo non si modifica la funzione di scala  $\phi$ . Questo implica che la MRA associata al sistema prima del Lifting, costituita dagli spazi  $\{V_j^0\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , e

quella costruita sul sistema modificato mediante Lifting, di spazi  $\{V_j\}_{j \in Z}$ , sono uguali, o meglio

$$\forall j \in Z \quad V_j^0 = V_j .$$

Questo limita le modifiche che con un singolo passaggio di Lifting si possono produrre, infatti se definiamo

**Definizione 4.7.1** (Operatore di Lifting)

Siano  $s_0, \dots, s_K$  dei coefficienti reali fissati, definiamo  $L$  operatore di Lifting nella MRA di funzione di scala  $\phi$  come

$$\begin{aligned} L : L^2(\mathfrak{R}) &\rightarrow L^2(\mathfrak{R}) \\ L : \phi &\rightarrow \phi = \phi \\ L : \psi^0 &\rightarrow \psi^0 - \sum_{k=0}^K s_k \phi(\cdot - k) = \psi \end{aligned} .$$

Indichiamo inoltre con  $L^j$  la restrizione di  $L$  a  $V_j$ .

Nel caso sopra descritto è quindi immediato verificare che vale

$$\begin{aligned} L^{j+1}(V_{j+1}) &= V_{j+1} , \\ L^{j+1}|_{V_j} &= Id|_{V_j} , \\ L^{j+1}(W_j) &\supset W_j . \end{aligned}$$

Ovviamente questo passaggio di Lifting altera le relazioni di biortogonalità tra gli spazi, infatti se prima del Lifting si poteva sfruttare la scomposizione  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , dopo un passaggio di Lifting l'unica cosa che si può dire è che  $V_{j+1} = \prec \phi_j(\cdot - k), \psi_j(\cdot - k) \succ_{k \in Z}$ . Per descrivere come il passaggio di Lifting agisce sulle funzioni duali bisogna introdurre il seguente operatore

**Definizione 4.7.2** (Operatore di Lifting Duale)

Siano  $t_0, \dots, t_K$  dei coefficienti reali fissati, definiamo  $\tilde{L}$  operatore di Lifting Duale nella MRA di funzione di scala  $\phi^0$  come

$$\begin{aligned} \tilde{L} : L^2(\mathfrak{R}) &\rightarrow L^2(\mathfrak{R}) \\ \tilde{L} : \tilde{\phi}^0 &\rightarrow \tilde{\phi}^0 - \sum_{k=0}^K t_k \tilde{\psi}(\cdot - k) = \tilde{\phi} . \\ \tilde{L} : \tilde{\psi}^0 &\rightarrow \tilde{\psi}^0 = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

Indichiamo inoltre con  $\tilde{L}^j$  la restrizione di  $\tilde{L}$  a  $V_j$ .

L'operatore  $\tilde{L}$  altera le funzioni di scala duali e quindi non si possono fare considerazioni simili a quelle fatte per  $L$ . Quello che rimane invariato dopo un passaggio di

Lifting Duale sono gli spazi  $W_j$ , com'è facile osservare.

Osserviamo che questi due operatori permettono di descrivere anche i passaggi di Lifting duale, a meno di ridefinirli invertendo le tilde.

Proviamo ora ad alternare per un numero finito di volte diversi passaggi di Lifting e di Lifting Duale. Per il Teorema 4.5.1 otterremo una base biortogonale di ondine per  $L^2(\mathfrak{R})$ . Se supponessimo di partire dalla Lazy Wavelet, il Teorema 4.6.1 garantisce che modificando il numero di passaggi e i coefficienti di Lifting si riescono a descrivere tutte le base biortogonali di ondine di  $L^2(\mathfrak{R})$  a supporto compatto.

L'effetto che questi passaggi producono sulle funzioni corrisponde a sommare diverse combinazioni lineari di traslate delle funzioni di scala e funzioni ondina. Sulle funzioni ondina duale e sulle funzioni di scala duale l'effetto è analogo.

Possiamo quindi dire che i passaggi di Lifting modificano separatamente la MRA e la MRA duale. Inoltre il singolo spazio  $V_j$  può essere modificato solo da contributi provenienti dallo spazio  $W_j$ . Possiamo schematizzare quanto detto nella maniera seguente,

$$\begin{aligned}
 \phi &\rightarrow \sum_{i=0}^I s_i \phi_i + \sum_{j=0}^J t_j \psi_j +, \dots, + \sum_{i=0}^{I_n} s_i \phi_i + \sum_{j=0}^{J_n} t_j \psi_j \\
 \psi &\rightarrow \sum_{h=0}^H u_h \phi_h + \sum_{k=0}^K w_k \psi_k +, \dots, + \sum_{h=0}^{H_n} u_h \phi_h + \sum_{k=0}^{K_n} w_k \psi_k \\
 \tilde{\phi} &\rightarrow \sum_{i=0}^I s_i \tilde{\phi}_i + \sum_{j=0}^J t_j \tilde{\psi}_j +, \dots, + \sum_{i=0}^{I_n} s_i \tilde{\phi}_i + \sum_{j=0}^{J_n} t_j \tilde{\psi}_j \\
 \tilde{\psi} &\rightarrow \sum_{h=0}^H u_h \tilde{\phi}_h + \sum_{k=0}^K w_k \tilde{\psi}_k +, \dots, + \sum_{h=0}^{H_n} u_h \tilde{\phi}_h + \sum_{k=0}^{K_n} w_k \tilde{\psi}_k
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

dove per  $\phi_j$  si intende  $\phi(\cdot - j)$ , dove gli insiemi di indici  $I, I_n, J, J_n, H, H_n, K, K_n$  sono finiti e dove supporremo i coefficienti  $s_i, t_j, u_h, w_k$ , liberamente scelti.

Osserviamo che le funzioni della MRA generata da  $\phi$  non si mescolano con quella generata da  $\tilde{\phi}$  e che vale sempre  $\phi, \psi \in V_1$ , cioè gli spazi all'interno della MRA rimangono invariati.

A questo punto possiamo supporre di riuscire a scrivere esplicitamente una qualsiasi coppia di basi biortogonali come combinazione lineare delle traslate delle funzioni  $\phi^0$  e  $\psi^0$ , questo offrirebbe delle espressioni per determinare la funzione di scala duale e dell'ondina duale, completando così il Teorema 4.2.1. Secondo il Teorema 4.6.1 i filtri  $h^0$  e  $g^0$  di partenza devono essere quelli della Lazy Wavelet. Purtroppo ai filtri della Lazy Wavelet non è associata alcuna funzione di scala, questo spiega perchè si opera sempre basandosi sui filtri e motiva perchè non si dispone di un'espressione esplicita per le funzioni, come il Corollario 4.2.1 o il Corollario 4.5.1.

Osserviamo che il tentativo di partire da altre funzioni  $\phi^0$  e  $\psi^0$ , come ad esempio quelle associate al sistema di Haar, impedisce di descrivere tutti i possibili sistemi biortogonali.

Possiamo fare una seconda osservazione riguardo le formule (4.30). Dal momento che tutte le basi biortogonali di ordine  $n$  a supporto compatto si scrivono in questa maniera, anche le basi ortonormali di ordine  $n$  devono rispettare queste formule. Vogliamo allora indagare quali ordine ortonormali è possibile associare ad un fissato filtro FIR passa basso  $h$ , oltre a quella definita dalla formula (1.27). Bisognerà cioè determinare tutti e soli i filtri passa basso  $h^1$  che non alterano la MRA associata.

Sia  $h^0$  il filtro passa basso iniziale e  $\phi^0 = \tilde{\phi}^0$  la funzione di scala ortonormale a questo associata. Tutte le funzioni di scala a supporto compatto che possiamo ottenere da questa mediante passaggi di Lifting sono descritte dalle formule (4.30). Indichiamo con  $\phi^1, \psi^1, \tilde{\phi}^1, \tilde{\psi}^1$  le funzioni ottenute dopo  $n$  passaggi di Lifting. Per non alterare l'ortonormalità del sistema iniziale dovrà accadere

$$\begin{aligned} & \cdot \tilde{\phi}^1 = \phi^1 \\ & \cdot \prec \phi^1 \succ = \prec \phi^0 \succ \cdot \end{aligned}$$

La seconda condizione è soddisfatta se e solo se vale  $\phi^1 = \lambda_k \phi_k^0$ . Per ottenere questo occorre che i termini contenenti  $\psi$  nell'espressione di  $\phi$  in (4.30) si annullino tra loro. Per soddisfare la prima condizione occorre operare passaggi di Lifting e di Lifting Duale con gli stessi coefficienti, poiché inizialmente vale  $\phi^0 = \tilde{\phi}^0$ .

L'unica funzione ondina  $\phi^1$  che genera una base ortonormale che si può associare ad un fissato filtro  $h$  è quindi una traslata della funzione ondina  $\phi^0$ .

In termini di trasformata avremo che

$$\hat{\phi}^1(\omega) = e^{ik\omega} \hat{\phi}^0(\omega),$$

che corrisponde al risultato di Proposizione 1.4.1 nel caso di filtri FIR.

Possiamo quindi concludere che la funzione ondina associata ad un filtro passa basso è essenzialmente unica nel caso ortonormale.

Ritorniamo nel caso si operi un singolo passaggio di Lifting sul sistema ortonormale di filtri  $(h, g)$ . Viste le considerazioni fatte sugli spazi della MRA si ha che per il calcolo dei coefficienti ondina della funzione si può utilizzare la formula

$$\forall j, k \in Z \quad d_j^1[k] = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k}^0 \rangle + \sum_{h \in K} s_h \langle f, \phi_{j,h+k} \rangle = d_j^0[k] + \sum_{h \in K} s_h a_j[h].$$

Questa scomposizione può evidentemente essere divisa in due fasi, prima il calcolo dei "normali" coefficienti  $d_j^0[k] = \langle f, \psi_{j,k}^0 \rangle \forall j, k \in Z$ , poi il calcolo della modifica che il Lifting produce, ossia i coefficienti  $d_j^1[k]$ ,  $\forall j, k \in Z$  operazione sempre possibile se si

dispone dei coefficienti  $a_j[k] = \langle f, \phi_{j,k}^0 \rangle, \forall j, k \in Z$ . Tale scomposizione è ovviamente invertibile.

Anche la scomposizione prodotta dai filtri iniziali  $(h^0, g^0)$ , che coincide a quella appena descritta sulla banda bassa, è invertibile.

La fase di ricostruzione utilizza la formula (3.5) dell'algoritmo di Mallat basandosi sui filtri  $(h, g)$ , se nella scomposizione è stato eseguito un passaggio di Lifting, o sui filtri  $(h^0, g^0)$  altrimenti.

Nel primo caso tuttavia, come si vede nello schema di figura 4.6, la ricostruzione può essere eseguita con un passaggio di Lifting inverso al precedente, seguito dalla formula (3.5). Si ottiene quindi la collezione dei coefficienti  $\{d_j^0[k]\}_k$ , calcolando ogni singolo coefficiente  $d^0[k]$  a partire dal rispettivo coefficiente  $d^1[k]$  e dalla collezione  $\{a_j[k]\}_k$ .

Possiamo quindi eseguire la codifica nel seguente modo, una modalità che non rientra nel caso biortogonale, ma che risulta efficace negli esempi implementati.

- i)** Si calcolano i coefficienti  $\{a_j[k]\}$  e  $\{d_j^0[k]\}$ , secondo la normale codifica. Si esegue il passaggio di Lifting su una copia del segnale sulla banda bassa ottenendo  $d_j^1[k] = d_j^0[k] + \sum_h s_h a_j[h]$ .

Questo equivale alla seguente scomposizione negli spazi della MRA:

$$V_{j+1} \rightarrow V_j^0 \oplus W_j^0 \rightarrow V_j^0 \cup W_j, \quad \text{con } V_j^0 \cap W_j \neq 0.$$

- ii)** Si adotta un criterio per scegliere quale dei due coefficienti ondina trasmettere (ad esempio quello di modulo minore o di trasmettere  $d^1[k]$  solo se questo è nullo) e si registra quale dei due è stato trasmesso. Questa scelta equivale a stabilire se eseguire o meno il singolo passaggio di lifting sul coefficiente  $d_j^0[k]$ .

L'idea è motivata dal fatto che il passaggio di Lifting potrebbe non risultare conveniente in ogni circostanza, come vedremo negli esempi. La scelta di un'ondina dal maggior numero di momenti nulli, e quindi di una base meglio localizzata, è in linea di massima vantaggiosa. Tuttavia quando si ha  $d_j^0[k] = 0$ , il passaggio di Lifting produce in generale un coefficiente  $d_j^1[k] \neq 0$ , poiché nulla assicura che  $\sum_h s_h d_j[h] = 0$ , questo riduce la compressione della codifica.

Osserviamo che la soluzione migliore consiste nel calcolare  $d_j^1[k]$  solo se  $d_j^0[k] \neq 0$ , e poi di trasmettere  $d_j^1[k]$  solo se questo è nullo. Così facendo si ottiene una buona compressione e un discreto vantaggio computazionale perchè non si richiede di eseguire sempre il passaggio **i**).

- iii)** Se si dispone di  $d_j^1[k]$ , si ricostruisce il segnale con un passaggio inverso di Lifting per ottenere  $d_j^0[k]$ . Ricordiamo che per questo passaggio si richiedono solamente

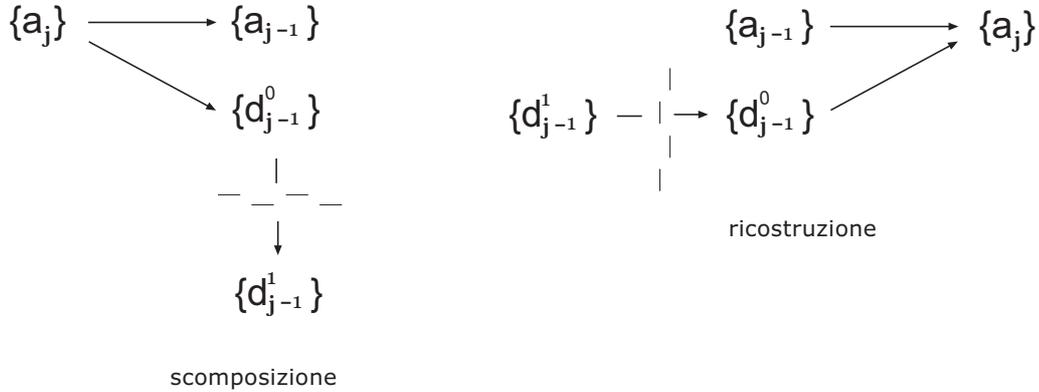


Figura 4.13: Schema di Lifting Opzionale. La linea tratteggiata indica la possibilità di disporre di un solo coefficiente  $d_j^0[k]$  o  $d_j^1[k]$  per  $k$  fissato.

i coefficienti  $\{a_j[k]\}_k$ . Infine, una volta ottenuta  $\{d_j^0[k]\}$ , grazie alla formula (3.5) si ricostruisce il segnale. Questo caso corrisponde a

$$V_j, W_j \rightarrow W_j^0, \quad V_j \oplus W_j^0 \rightarrow V_{j+1}.$$

Altrimenti, se si dispone di  $d_j^0[k]$ , basterà eseguire una ricostruzione mediante la formula (3.5).

Lo schema di questa codifica è riportato in figura 4.13.

Osserviamo che, nel caso venissero applicati consecutivi passaggi di lifting al sistema di base, questo procedimento risulterebbe ancora valido poiché, come banalmente si vede dal Corollario 4.2.1, questi possono essere raccolti in un solo passaggio di lifting. Questo procedimento è stato rappresentato con un programma in Maple 9, mostrando così un effettivo guadagno in termini di compressione del segnale.

Come risulta evidente, le modifiche appena descritte non sarebbero valide nel caso venissero applicati passaggi di Lifting e di Lifting Duale poiché, in tal caso, le due MRA non avrebbero più la stessa funzione di scala.

È bene fare un'ultima considerazione riguardo il passaggio di Lifting Duale. Se si utilizza questo metodo per aumentare il numero di momenti nulli della funzione di scala o dell'ondina duale, non si evidenzia un vantaggio computazionale, perlomeno nei programmi sviluppati nell'Appendice. Questo avviene perché le approssimazioni vengono

eseguite sui coefficienti ondina, coefficienti che rimangono inalterati dal singolo Lifting. Per quel che riguarda i coefficienti  $\{a_j[k]\}_k$ , a questi vengono inizialmente associati i campionamenti della funzione e quindi non evidenziano la migliore localizzazione della funzione di scala.

# Appendice A

## Programmi

In questa appendice riportiamo la struttura di alcuni programmi scritti in Maple 9. Questi programmi sono stati pensati per rappresentare la scomposizione fra gli spazi di una MRA, per eseguire la codifica in sottobande e per valutare concretamente l'efficacia del Lifting. Sono da intendere come costruzione di esempi dal momento che non risultano ottimizzati per quel che riguarda efficienza e costi computazionali.

### A.1 La struttura del programma, Haar e D4

La struttura di questi programmi è sostanzialmente unica. Entrambi iterano l'Algoritmo di Ricostruzione Perfetta di Mallat, applicato con filtri differenti.

Inizialmente compare la dichiarazione e inizializzazione delle variabili, e l'assegnazione dei valori ai filtri. Non riportiamo per ragioni di spazio questa parte, limitandoci ad una descrizione delle variabili piu' importanti.

**Variabili d'iterazione:**  $j$  è l'indice dello spazio  $V_j$ , ossia  $2^j$  è l'ampiezza dell'intervallo della funzione caratteristica, funzione di scala dello spazio nel quale si esegue la prima approssimazione di  $f$ . **tot** è un intero negativo che esprime il numero delle iterazioni che verranno eseguite,  $V_{j+tot}$  è quindi lo spazio in cui si esegue l'approssimazione più grossolana di  $f$ .

**Intervalli:**  $(a,b)$  intervallo sul quale viene valutata la funzione  $f$ .  $(\mathbf{A},\mathbf{B}), (A,B) \supset (a,b)$  è un intervallo che contiene un numero intero di multipli di  $2^j$ .

**Contatori:** **count** variabile locale, **Ncount** il numero dei coefficienti nulli nella codifica iniziale, **Dcount** numero di coefficienti ondina nulli nella codifica finale, **Acount** coefficienti di scala nulli in  $V_{j+tot}$ .

**Coefficienti:**  $\{a_j[i, k]\}_{i, k}$  coefficienti di  $P_i(f)$  ossia della proiezione di  $f$  sullo spazio  $V_i$  questi sono ottenuti mediante il filtro passa basso  $h$ , grazie alla formula (3.3). I coefficienti ondina,  $\{d_j[i, k]\}_{i, k}$ , sono i dettagli che permettono di ricostruire, assieme a  $\{a_j[i, k]\}_{i, k}$  la proiezione di  $f$  nello spazio della MRA immediatamente precedente,  $V_{i+1}$ . Sono calcolati grazie alla formula (3.4) e al filtro passa alto  $g$ . Con  $\{a[i, k]\}_{i, k}$  si indicano coefficienti ondina prodotti nella fase di ricostruzione, differiscono da  $\{a_j[i, k]\}_{i, k}$  per via delle approssimazioni opportunamente eseguite. Tutti questi array vengono inizializzati a zero.

$L$ ,  $1/L$  è la soglia di approssimazione per i coefficienti della codifica finale.

**Filtri:**  $h$ , passa basso,  $g$ , passa alto.

Nella prima fase si calcola  $\{a_j[0, k]\}_k$  insieme dei coefficienti di  $P_j(f)$ . Dal momento che si dispone dell'espressione analitica di  $f$  possiamo determinare tali coefficienti a partire dalla loro definizione  $a_j[0, k] = \langle f, \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}(x) \rangle$ .

```
for i from 0 to N
  do
    aj[0, i] := 2^j * evalf(int(f, x=A+(2^(-j))*i..A+(2^(-j))*(i+1))); %1)
    if(aj[0, i]=0)
      then Ncount:=Ncount+1;
    end if:
  end do:
```

Questa implementazione risulta efficace per la codifica rispetto al sistema di Haar, ma non scompone correttamente la funzione nella MRA generata dalle ondine D4. In questo lavoro di tesi non abbiamo approfondito questo problema, ci siamo limitati a dire nel paragrafo 4.3 che, nella pratica, poiché non si conosce l'espressione di  $f$ , si utilizza un campionatore per approssimare questi valori. Alla riga %1) si sostituisce la seguente

```
aj[0, i] := 2^j * eval(f, x=A+(2^(-j))*i+2^(-j-1)); %1')
```

L'iterazione della fase di scomposizione, basata sulle formule (3.3) e (3.4), viene descritta nella parte seguente. Facciamo presente la fase di troncamento che viene eseguita solamente sui coefficienti che costituiscono la codifica finale. Riportiamo solamente la formula nel caso del sistema di Haar, nel caso della codifica basata sulle ondine D4 vengono modificate le linee \%2), \%3), introducendo gli appropriati filtri.

```
N1:=N/2; for k from -1 by -1 to tot
  do
```

```

sprintf("%d iterazione",-k);
for p from k to N1-k
  do
    aj[k,p]:=evalf(sqrt(2)*(h[0]*aj[k+1,2*p]+h[1]*aj[k+1,2*p+1])); %2)
    dj[k,p]:=evalf(sqrt(2)*(g[0]*aj[k+1,2*p]+g[1]*aj[k+1,2*p+1])); %3)
    dj[k,p]:=trunc(L*dj[k,p])/L:
    if(dj[k,p]=0)
      then count:=count+1;
    end if;
  od;
Dcount:=Dcount+N1+2+1-count;
count:=0;
sprintf("numero di coefficienti ondina non nulli %d su %d",Dcount,N);
  if (N1 mod 2=0)
    then N1:=N1/2;
    else N1:= (N1+1)/2;
  end if:
od;
N1:=2*N1;
for i from tot to N1-tot
  do
    aj[tot,i]:=trunc(L*aj[tot,i])/L:
    if(aj[tot,i]=0)
      then count:=count+1
    end if:
  od:
Acount:=N1+2*abs(tot)-count+1;

```

Per la ricostruzione si basa sulla formula (3.5) e viene implementata dalla parte seguente del programma. Anche qui occorre modificare le linee \%4) \%5) per l'uso delle ondine D4.

```

for k from tot to -1
  do
    N1:=2*N1;
    for p from k to N1-k
      do
        if (p mod 2 =0)
          then a[k+1,p]:=(h[0]*aj[k,p/2]+g[0]*dj[k,p/2]); %4)
          else a[k+1,p]:=(h[1]*aj[k,(p-1)/2]+g[1]*dj[k,(p-1)/2]); %5)
          end if;
        a[k+1,p]:=evalf(sqrt(2)*a[k+1,p]);
      od;
    od;
  od;

```

```

    end do:
end do:

```

I programmi, grazie alla riga seguente, calcolano una stima della compressione mediante il rapporto fra il numero dei coefficienti non nulli nella codifica prodotta e il numero dei coefficienti non nulli della codifica iniziale.

```

evalf((Dcount+Account)/(N-Ncount))*100;

```

Per valutare la ricostruzione prodotta vengono confrontati i grafici di  $P_0(f)$ , ottenuta dai coefficienti  $\{a_{j_0}[k]\}$  e della funzione che si ottiene dai coefficienti  $\{a[0, k]\}$ .

Funzione iniziale e ricostruzione coincidono sempre nel caso non venga operata alcuna approssimazione, questo è garantito dal Teorema 3.1.1.

Si è implementato anche un confronto diretto tra le stringhe dei coefficienti  $\{a_j[0, k]\}$  e  $\{a[0, k]\}$ .

In alcuni casi significativi viene prodotto il grafico delle funzioni  $P_i(f)$   $i=j, \dots, j+tot$ , queste rappresentano le varie approssimazioni della funzioni che possono anche essere raccolte in un grafico 3D.

Non presentiamo altro codice relativo a quanto descritto, vedremo invece nel dettaglio come introdurre un appropriato passaggio di Lifting in queste codifiche.

## A.2 Lo schema di Lifting e Lifting Duale

Grazie a quanto dimostrato nel paragrafo 4.3 con lo schema di figura 4.6, la codifica rispetto ad una base ortonormale (associata ad Haar o alle ondine D4) modificata da Lifting è facilmente implementabile. Ricavati i tutti i coefficienti di scala  $\{a_j[k]\}$  e i coefficienti ondina  $\{d_j[k]\}$  relativi al sistema ortonormale iniziale, il passaggio di Lifting consiste nel modificare ogni singolo coefficiente  $d_j[k]$  sommando una combinazione lineare di  $\{a_j[k]\}$  di coefficienti  $s[k]$ , dove  $s(\omega)$  è il polinomio di Lifting. Nei casi considerati si utilizzano come polinomi di Lifting quelli ricavati nel paragrafo 4.3 ossia, per l'ondina di Haar

```

s:=array(-1..1): s[-1]:=1/8: s[0]:=0: s[1]:=-1/8:
e per le ondine D4
s:=array(-2..2): s[-2]:=s[2]:=\sqrt(3)/64: s[-1]:=s[1]:=0: s[0]:=-2*\sqrt(3)/64

```

Ciascun coefficiente ondina viene così modificato.

$$d_j[k,p] := d_j[k,p] - s[-2] * a_j[k,p-2] - s[0] * a_j[k,p] - s[2] * a_j[k,p+2];$$

Osserviamo che tale implementazione può essere anticipata immediatamente dopo il calcolo del singolo coefficiente  $d_j[k]$ , senza richiedere un ciclo apposito per il Lifting. Questo è un ulteriore punto a favore del Lifting.

Nella fase di ricostruzione, come si vede in figura 4.6, occorre eseguire un passaggio di Lifting inverso. Prima di applicare la formula (3.5), eseguendo il codice presentato nel paragrafo precedente, occorre modificare tutti i coefficienti ondina nella maniera seguente.

$$d_j[k,p] := d_j[k,p] - s[+1] * a_j[k,p+1] - s[-1] * a_j[k,p-1];$$

Osserviamo che i programmi presentati nel paragrafo precedente descrivono la scomposizione e la ricostruzione fra gli spazi della stessa MRA, poiché si opera con un sistema ortonormale. Il Lifting produce un sistema biortogonale di filtri e quindi scomposizione e ricostruzione avvengono in due MRA distinte. Questo però non altera la struttura del programma, per quanto detto per ricavare lo schema 4.6.

Nell'Appendice B presenteremo una stima della compressione ottenuta grazie ad un un passaggio Lifting.

Presentiamo anche il codice per il Lifting Duale. Come mostrato in figura 4.10, questo passaggio è molto simile al precedente. I coefficienti da utilizzare sono gli stessi del lifting normale poiché a partire da un sistema ortonormale si ha  $\phi = \tilde{\phi}$ ,  $\psi = \tilde{\psi}$ . Il ciclo da introdurre, questa volta dopo aver calcolato tutti i coefficienti  $\{d_j[k]\}$ , dovrà contenere la seguente riga al posto della precedente

$$a_j[k,p] := a_j[k,p] + s[-2] * d_j[k,p-2] + s[0] * d_j[k,p] + s[2] * d_j[k,p+2];$$

E analogamente per la ricostruzione.

Come abbiamo già accennato, il Lifting Duale, se finalizzato ad alzare il numero di momenti nulli della funzione di scala, non produce un vantaggio diretto nella compressione poiché l'approssimazione viene eseguita sui coefficienti ondina, i quali costituiscono la codifica.

Tuttavia utilizzare una funzione di scala con un maggior grado di regolarità, come ad esempio avviene nel caso delle ondine di Daubechies, comporta una minor amplificazione degli errori di trasmissione.

### A.3 "Lifting Opzionale"

L'ultima sezione è dedicata alla modifica apportata al Lifting che è stata descritta al termine del paragrafo 4.7. Questo algoritmo permette di sfruttare il passaggio di Lifting soltanto se questo produce degli effettivi vantaggi. Lo schema di tale scomposizione e ricostruzione è stato rappresentato in figura 4.13.

Per prima cosa si calcolano i coefficienti ondina senza operare su di essi il passaggio di Lifting. Analizziamo il procedimento per il singolo coefficiente, che chiameremo  $c_j[k, p]$ . Per il programma ci si è appoggiati ad una seconda stanga di coefficienti, anch'essi inizializzati a zero, i coefficienti  $d_j[k, p]$ . Si procede come segue

- i) Se vale  $c_j[k, p] = 0$ , allora non occorre eseguire il passaggio di lifting sul singolo coefficiente, poichè localmente la miglior descrizione è data dalla funzione ondina iniziale. Quindi si trasmettono due coefficienti nulli  $d_j[k, p] = c_j[k, p] = 0$ , senza eseguire i calcoli per il Lifting.
- ii) Se  $c_j[k, p] \neq 0$  occorre eseguire il passaggio di Lifting, per valutare se l'ondina modificata da Lifting descrive meglio il sistema. Si calcola quindi il coefficiente  $d_j[k, p]$ . Nel caso  $d_j[k, p] \neq 0$  si trasmette tale coefficiente e si pone  $c_j[k, p] = 0$
- iii) se  $d_j[k, p] = 0$  si trasmette questo coefficiente, mentre  $c_j[k, p]$  assumerà un particolare valore, ad indicare per fase di ricostruzione di eseguire il passaggio di Lifting inverso sul coefficiente  $d_j[k, p] = 0$ . Occorre infatti distinguere questa situazione da quella presentata nel caso i).

Nel programma si è scelto di porre  $c_j[k, p] = 1$ .

Quello appena descritto è solo una delle possibili scelte per il Lifting Opzionale, ad esempio si potrebbe scegliere di trasmettere tra  $c_j[k, p]$  e  $d_j[k, p]$ , quello di modulo minore, o di trasmettere  $d_j[k, p]$  soltanto quando questo è nullo, in modo da ridurre i costi computazionali, in modo da dover eseguire il passaggio di Lifting inverso solo su coefficienti  $d_j[k, p]$  nulli.

Facciamo presente che la scelta di lavorare con due copie dei coefficienti ondina non aumenta il peso della codifica, per quanto detto infatti, ad ogni indice corrisponde al massimo un coefficiente non nullo (o comunque di interesse, come illustrato nel caso iii)).

Ecco il ciclo da aggiungere dopo che si dispone dei coefficienti  $a_j[k]$ .

```

for p from k to N1-k
do
  cj[k,p]:=trunc(L*dj[k,p])/L:
  if(cj[k,p]=0)
    then count:=count+1;
    else dj[k,p]:=dj[k,p]-s[-2]*aj[k,p-2]-s[0]*aj[k,p]-s[2]*aj[k,p+2];
        dj[k,p]:=trunc(L*dj[k,p])/L:
        if (dj[k,p]=0)
          then count:=count+1;
            cj[k,p]:=1;
          else cj[k,p]:=0;
        end if:
    end if:
od;

```

La fase di ricostruzione si differenzia a seconda di quali coefficienti si dispone. Il codice seguente realizza la prima fase della ricostruzione, la seconda fase sarà data dalla semplice applicazione della formula 3.5.

```

for p from k to N1-k
do
  if(cj[k,p]=0)
    then
      if(dj[k,p]<>0)
        then dj[k,p]:=dj[k,p]+s[-2]*aj[k,p-2]+s[0]*aj[k,p]+s[2]*aj[k,p+2];
        end if:
      else dj[k,p]:=dj[k,p]+s[-2]*aj[k,p-2]+s[0]*aj[k,p]+s[2]*aj[k,p+2];
      end if:
od:

```

Nel prossimo capitolo valuteremo l'efficacia di questi programmi.

# Appendice B

## Grafici e considerazioni

Presentiamo nel seguito i risultati e i grafici dei programmi sopra descritti. Tutti i programmi producono ricostruzione perfetta, a meno dell'approssimazione eseguita sui coefficienti della codifica.

Con questi risultati vogliamo mostrare come, a seconda del tipo di funzione su cui si esegue la codifica, i filtri Haar e D4 realizzano una diversa compressione.

Per tutte le funzioni si è scelto di eseguire un troncamento sui coefficienti dell'ordine di 1/1000.

La prima funzione  $f$  scelta è così definita

$$f(x) = \begin{cases} [10x] & 0 \leq x < 1 \\ [4x] & 1 \leq x < 2 \\ [30 - 10x] & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

dove  $[x]$  è la funzione parte intera di  $x$ . Il grafico di  $f$  è rappresentato in figura B.1. I campionamenti per questa funzione sono stati presi ad intervalli di  $2^{-5}$  e la scomposizione è stata iterata 5 volte. Questo vuol dire che, nella scomposizione basata sulla MRA di Haar, la funzione verrà interpretata come una funzione costante su intervalli di ampiezza 1/32. Alla quinta iterazione della scomposizione, si scompone  $f$  in  $V_0$ , ottenendo  $P_0(f)$ . Questa sarà quindi una funzione costante a tratti su intervalli di ampiezza 1.

È prevedibile che la migliore compressione si ottenga con l'algoritmo basato sul filtro  $h = [1/2, 1/2]$ , dal momento che anche  $f$  è una funzione costante a tratti.

La compressione prodotta dalle varie codifiche (grazie al troncamento dei coefficienti)

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	42.69
Haar con Lifting	87.64
Haar con Lifting Opzionale	42.69
D4	79.77

Tabella B.1: La percentuale indica il rapporto tra codifica prodotta con i filtri specificati e la codifica iniziale della funzione  $f$ .

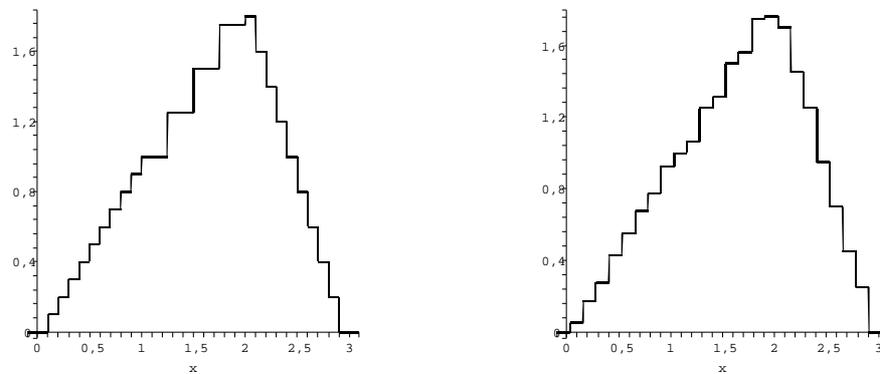


Figura B.1: Grafico di  $f$  e proiezione di  $f$  su  $V_3$

è raccolta in tabella B.1.

I grafici delle funzioni presentano le varie proiezioni di  $f$  sugli spazi della MRA di Haar.

Questo caso particolare mostra che non sempre il passaggio di Lifting può essere vantaggioso. Avere ondi meglio localizzate non serve per approssimare questa funzione, questo è dovuto al fatto che il passaggio di Lifting modifica la MRA rispetto alla quale scomporre la funzione  $f$ . Mentre, come abbiamo già detto, la MRA migliore nella quale scomporre tale funzione risulta essere quella di Haar.

Osserviamo che il Lifting Opzionale "sceglie" quale codifica è meglio eseguire in questo caso, se quella di Haar o quella di Haar con un passaggio di Lifting. Questo in teoria dei segnali si rivela molto utile poiché a priori non si conosce la funzione e non si può stimare quale filtro risulterebbe ottimale.

È stato anche eseguito un grafico 3D che affianca diverse proiezioni della funzione  $f$ .

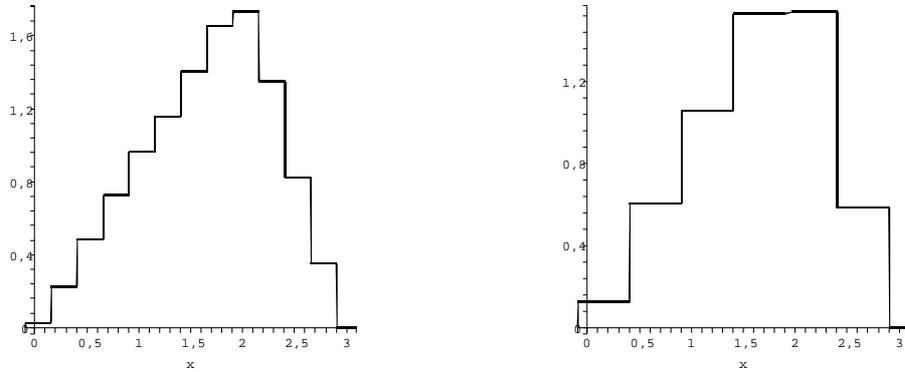


Figura B.2: Grafico delle proiezioni su di  $V_2$  e  $V_1$

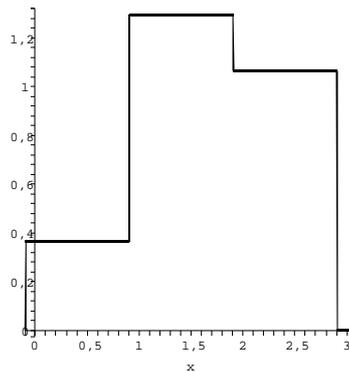


Figura B.3: Grafico della proiezione di  $f$  su  $V_0$ .

Vediamo ora la codifica in sottobande eseguita sulla la funzione  $g$ , definita

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x/10 - 1| & -\pi/2 \leq x < 0 \\ \sin(8x) & 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} ,$$

Scegliamo di ridurre l'ampiezza dell'intervallo iniziale ad  $2^{-8}$  e di aumentare a 8 il numero delle iterazioni. Ci aspettiamo quindi di produrre una maggiore compressione del segnale in termini percentuali, consapevoli dei costi computazionali che questo richiede. La funzione  $g$  è rappresentata in figura B.4, i risultati delle diverse codifiche sono riportati nella tabella B.2.

Notiamo che non è possibile ancora apprezzare le differenze tra le due funzioni di

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	55.41
Haar con Lifting	9.69
D4	23.23
D4 Lifting	15.40
D4 Lifting Opzionale	10.93

Tabella B.2: La percentuale indica il rapporto tra codifica prodotta con i filtri specificati e la codifica iniziale della funzione  $g$ .

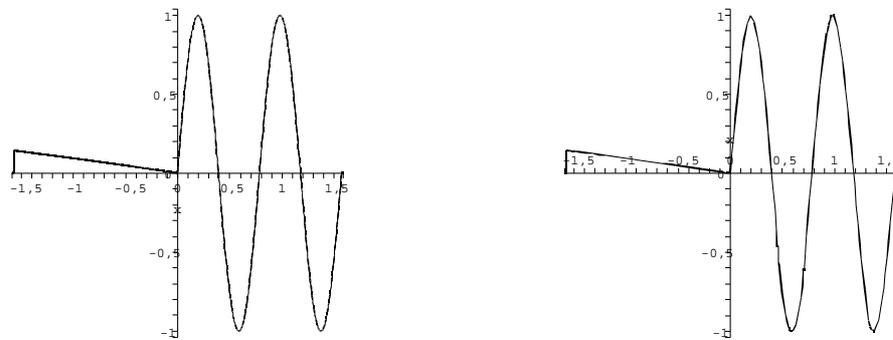


Figura B.4: Grafico di  $g$  e della sua proiezione su  $V_6$

figura B.4,  $P_6(g)$  è una funzione costante a tratti di ampiezza  $2^{-6}$ , mentre  $g$  è stata disegnata a partire da un campionamento di ampiezza  $2^{-8}$ .

Per trattare funzioni che "oscillano" più o meno rapidamente nel loro dominio si rivela quindi vantaggioso, oltre che scegliere un'appropriata approssimazione iniziale, alzare il numero dei momenti nulli della funzione ondina. Dalla tabella B.2 risulta evidente che i cambiamenti con questa finalità producono codifiche più ridotte. Infatti il passaggio di Lifting nella codifica e l'uso del filtro D4 migliorano la compressione. In questo caso il Lifting Opzionale risulta migliore anche della codifica con Lifting. Questo è dovuto al fatto che viene valutato, coefficiente per coefficiente, se il passaggio di Lifting risulta vantaggioso. In questo modo si riescono ad unire i vantaggi dei due filtri. Dove i coefficienti ondina iniziali sono già nulli questi vengono trasmessi direttamente senza ulteriori modifiche con Lifting. Altrimenti, nel caso il coefficiente ondina modificato fosse nullo viene trasmesso questo al posto del precedente, migliorando così

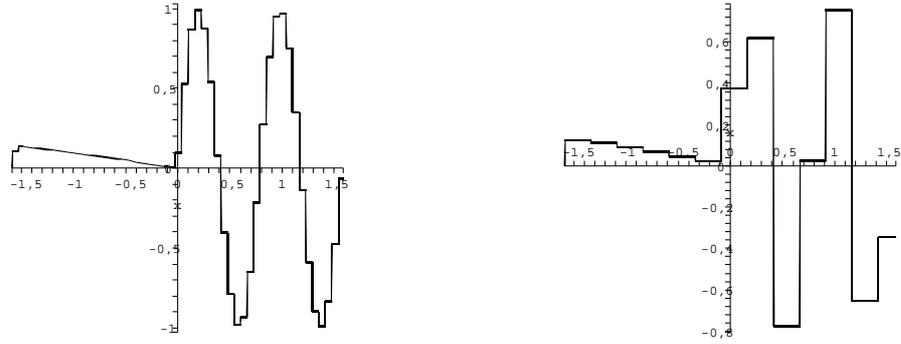


Figura B.5: Grafico delle proiezioni di  $g$  su  $V_4$  e  $V_2$

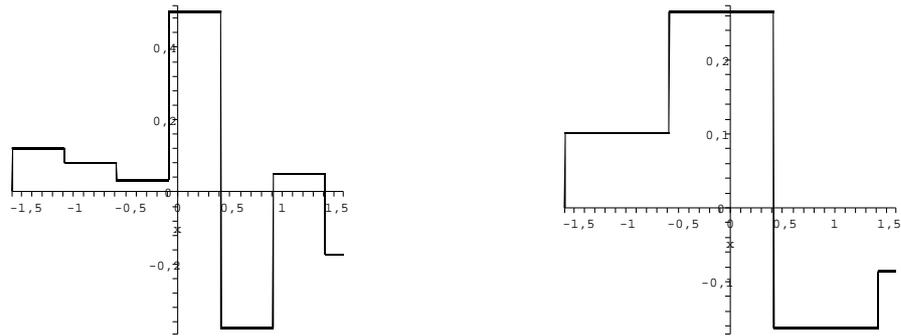


Figura B.6: Grafico delle proiezioni di  $g$  su  $V_1$  e  $V_0$

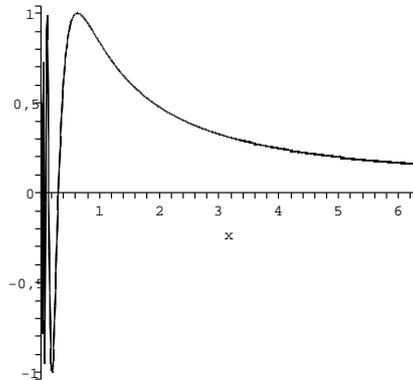


Figura B.7: Grafico della proiezione di  $h$  su  $V_7$

la compressione rispetto ad entrambe le codifiche.

Riportiamo anche una rappresentazione su grafico 3D di alcune scomposizioni di  $g$ .

Come ultimo caso è stata scelta la funzione

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (0.05, 2\pi).$$

Per trattare questa funzione abbiamo scelto un campionatore su intervalli di ampiezza  $2^7$  e abbiamo iterato la scomposizione 5 volte.

La funzione che viene approssimata dal campionatore -la proiezione su  $V_7$ - risulta differente dalla funzione  $h$ , ne riportiamo il grafico in figura B.7.

È stata scelta  $h$  per mostrare come le ondine siano efficaci per la codifica di una funzione che nel suo dominio presenta sia rapide oscillazioni e sia andamento più docile.

Per ottenere un'approssimazione più accurata di  $h$  occorre campionare tale funzione ad intervalli di minor ampiezza.

I risultati delle compressioni eseguite sono riportate in tabella B.3.

Filtri utilizzati	Percentuale
Haar	55.33
Haar con Lifting	9.67
D4	19.35
D4 Lifting	13.27
D4 Lifting Opzionale	10.17

Tabella B.3: La percentuale indica il rapporto tra codifica prodotta con filtri specificati e la codifica iniziale della funzione  $h$ .

# Bibliografia

- [1] [Bertoni,Grossi] A.Bertoni G.Grossi *Elaborazione Numerica dei Segnali* Dispense del corso AA 2001-2002 Università degli Studi di Milano DSI.
- [2] [Chui] C.K Chui *An Introduction to Wavelets* Academic Press San Diego (1992).
- [3] [Cohen] A.Cohen *Ondelettes et Traitement Numerique du Signal* Masson (1992).
- [4] [Cohen, Daubechies, Feauveau] A. Cohen, I.Daubechies, J.Feauveau *Bi-orthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets* Comm. Pure and Applied Mathematics (1992).
- [5] [Daubechies] I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelet* SIAM Philadelphia (1992).
- [6] [Daubechies,Sweldens] *Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps* Journal of Fourier Analysis and Applicationd 4 (1998).
- [7] [Mallat] S. Mallat *A Wavelet Tour of Signal Processing* Academic Press San Diego (1998).
- [8] [Soardi] P. Soardi *Appunti sulle Ondine* Pitagora Editrice Bologna (1998).
- [9] [Sweldens95] *The Lifting Scheme: a Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets* Applied and Computational Harmonic Analysis 3 (1996).
- [10] [Vetterli] M. Vetterli, J. Kovačević *Wavelet an Subband Coding* Perentice-Hall PTR (1995).